Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

8. Vorlesung (Zusatz), 13.12.2019

Sinus und Cosinus

Wir untersuchen zunächst die Differenzierbarkeit von sin im Punkt 0, d.h. wir untersuchen

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}.$$

Man kann sich geometrisch überlegen, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

gilt

Als Nächstes wollen wir die Ableitung von cos im Punkt 0 bestimmen, d. h.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(0+h)-\cos(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\cos(h)-1}{h} &= \frac{(\cos(h)-1)(\cos(h)+1)}{h(\cos(h)+1)} = \frac{\cos(h)^2-1}{h(\cos(h)+1)}\\ &= -\frac{\sin(h)^2}{h(\cos(h)+1)} = -\frac{\sin(h)}{h}\frac{\sin(h)}{\cos(h)+1}\end{aligned}$$

für alle $h \neq 0$, sodass

$$\begin{aligned}\cos'(0) &= -\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\frac{\sin(h)}{\cos(h)+1} = -\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{\cos(h)+1}\\ &= -1\cdot\frac{0}{1+1} = 0,\end{aligned}$$

da $\cos(0) = 1, \sin(0) = 0$ (und $\cos, \sin$ stetig sind).

Man kann sich geometrisch überlegen, dass

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \\ &= \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$, sodass

$$\sin'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\right) = \cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Ebenfalls kann man sich mit Hilfe der Formel auf der letzten Folie

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ überlegen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$, sodass

$$\cos'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}\right) = -\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Satz (Ableitungen von cos und sin)

Es gilt

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \textit{und} \quad \sin'(x) = \cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.