Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

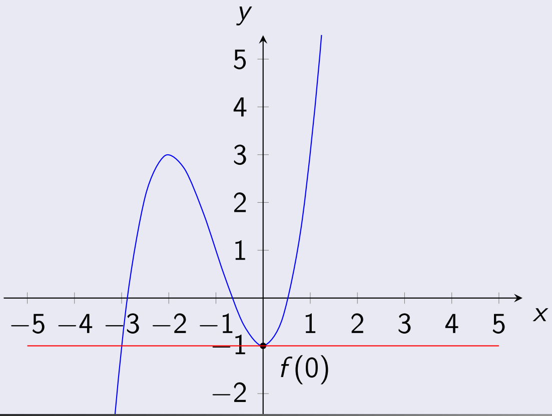
8. Vorlesung, 13.12.2019

Motivation

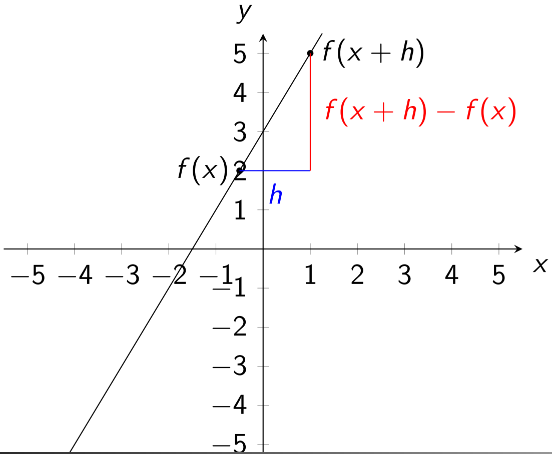
Im Folgenden wollen wir („hinreichend gutartige“) Funktionen $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ „lokal“ untersuchen, d. h. zu einem vorgegebenen Punkt $a \in D$ wollen wir uns anschauen wie sich die Funktion f in einem kleinen Bereich um a verhält. Wir werden hierzu versuchen die (möglicherweise sehr komplizierte) Funktion durch einfache Funktionen anzunähern (zu „approximieren“).

Die einfachste Approximation einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in D$ ist die Approximation durch die konstante Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(a)$.

Beispiel ($a = 0$)



Um eine Funktion in einem Punkt genauer approximieren zu können, müssen wir uns an die Steigung und Ableitung erinnern. Hierzu betrachten wir eine (affin) lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a_0 + a_1 \cdot x$ mit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.



Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a_0 + a_1 x$ $(a_0, a_1 \in \mathbb{R})$ eine (affin) lineare Funktion. Die Rechnung

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a_0 + a_1(x+h) - (a_0 + a_1 x)}{h} = a_1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$ motiviert die folgende Definition.

Definition

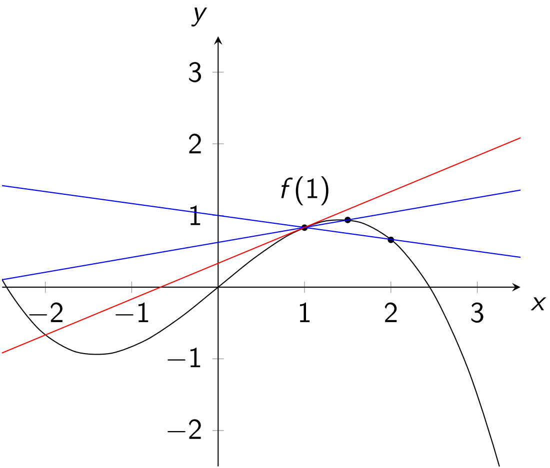
Die *Steigung von f im Punkt* $x \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f'(x) = a_1 .$$

Bemerkung

Für eine (affin) lineare Funktion ist die Steigung also in jedem Punkt gleich.

Um die Steigung in einem Punkt für eine allgemeinere Funktion zu definieren zu können, betrachten wir Sekanten und schließlich die Tangente.



Zu gegebenen $a \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$ ist die Sekante bzgl. a und $a+h$ gegeben durch

$$s_{a,h} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}(x-a)+f(a).$$

Die Tangente ergibt sich nun, wenn man h „immer kleiner macht" (den Grenzwert für h gegen 0 bildet):

$$t_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}(x-a)+f(a).$$

Damit der Grenzwert existiert, muss die Funktion f „schön genug" sein.

Definition

Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$. Wir nennen f *differenzierbar in* x, wenn der *Differentialquotient*

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert. In diesem Fall nennen wir $f'(x)$ die *Ableitung von* f *in* x. Wir nennen f *differenzierbar*, falls f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist. In diesem Fall nennen wir die Funktion

$$f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$$

die *Ableitung bzw. Ableitungsfunktion von* f.

Bemerkung

Wir betrachten manchmal auch den Fall, dass die Definitionsmenge ein Intervall ist (z.B. $(0;\infty)$) oder wir einzelne Punkte rausnehmen (z.B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$). Die Definition der Ableitung ist analog zur obigen.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Beispiel

1. Betrachte $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 5$ und sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5-5}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

2. Betrachte $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ und sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h\end{aligned}$$

für alle $h \neq 0$, sodass

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Beispiel

3 Betrachte $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$ und sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}\\ &= \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h}\\ &= \frac{-h}{(x+h)xh}\\ &= -\frac{1}{(x+h)x}\end{aligned}$$

für alle $h \neq 0$ und $h \neq -x$, sodass

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{(x+h)x}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und $c \in \mathbb{R}$ sowie $x \in \mathbb{R}$.

Satz

Falls f und g in x differenzierbar sind, dann gilt:

1. $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$,
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ *und* $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$,
3. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, *falls* $g(x) \neq 0$.

Beispiel

1. Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ und $c = 3$. Dann gilt
$$(3 \cdot f)'(x) = 3 \cdot f'(x) = 3 \cdot 2x = 6x$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.
2. Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x + 4$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4x - 2$. Dann gilt
$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 2 + 4 = 6$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.
3. Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x + 4$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Dann gilt
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 2x^2 + (2x+4)2x = 6x^2 + 8x$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel

4. Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ und $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$. Dann gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{2x\frac{1}{x} - x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{2+1}{\frac{1}{x^2}} = 3x^2$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Satz

Falls g in x und f in $g(x)$ differenzierbar sind, dann gilt

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Ist $g = f^{-1}$ die Umkehrfunktion von f, so folgt insbesondere

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

falls $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ gilt.

Beispiel

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x + 4$. Dann gilt

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2(3x + 4) \cdot 3 = 18x + 24$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Satz

1. *Seien* $c \in \mathbb{R}$ *und* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto c$ *sowie* $x \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*
$$f'(x) = 0.$$

2. *Seien* $n \in \mathbb{N}$ *und* $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$ *sowie* $x \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*
$$g_n'(x) = nx^{n-1}.$$

3. *Seien* $m \in \mathbb{N}$ *und* $h_m : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ *sowie* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Dann gilt*
$$h_m'(x) = -mx^{-m-1} = -\frac{m}{x^{m+1}}.$$

Beispiel

1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4$. Dann gilt
$$f'(x) = 0$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^5$. Dann gilt
$$g'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

3. Sei $h\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^3}$. Dann gilt
$$h'(x) = -\frac{3}{x^{3+1}} = -\frac{3}{x^4}$$
für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Folgerung

Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Wir nennen eine Funktion der Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

ein Polynom. Dann gilt

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel

1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 5x^3 - 4x + 2$. Dann gilt
$$f'(x) = 5 \cdot 3x^{3-1} - 4 \cdot 1x^{1-1} + 0 = 15x^2 - 4$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.
2. Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 10x^6 - 7x^5 - x^2$. Dann gilt
$$g'(x) = 10 \cdot 6x^{6-1} - 7 \cdot 5x^{5-1} - 2x^{2-1} = 60x^5 - 35x^4 - 2x$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

Frage

Sind die Funktionen $\exp, \ln, \sin$ und $\cos$ ebenfalls differenzierbar? Und falls ja, wie sehen ihre Ableitungen aus?

Antwort

Alle diese Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Im Folgenden werden wir sehen wie die Ableitungen jeweils aussehen.

Exponentialfunktion und Logarithmus

Um die Ableitung der Exponentialfunktion zu berechnen, ist die Ableitung im Punkt 0

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(0+h)-\exp(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}$$

entscheidend. Leider fehlen uns die Werkzeuge, um diesen Grenzwert zu berechnen, da hier die Zahl e eine entscheidende Rolle spielt. Man kann

$$\exp'(0) = 1$$

zeigen. Für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt damit

$$\exp'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x)\exp(h)-\exp(x)}{h}$$

$$= \exp(x) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(x).$$

Da ln die Umkehrfunktion von exp ist, erhalten wir

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

für alle $x \in (0; \infty)$.

Satz (Ableitungen von exp und ln)

Es gilt

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ *und*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

für alle $x \in (0; \infty)$.

Sinus und Cosinus

Satz (Ableitungen von cos und sin)

Es gilt

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad \textit{und} \quad \sin'(x) = \cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Eine knappe Herleitung finden Sie auf der Homepage.

Satz

Seien $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *und* $f\colon (0;\infty) \to (0;\infty),\ x \mapsto x^r$. *Dann gilt*

$$f'(x) = rx^{r-1}$$

für alle $x \in (0;\infty)$.

Beispiel

1. Betrachte $f\colon (0;\infty) \to (0;\infty),\ x \mapsto x^{-\frac{3}{2}}$. Dann gilt
$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$
für alle $x \in (0;\infty)$.
2. Betrachte $f\colon (0;\infty) \to (0;\infty),\ x \mapsto x^{\sqrt{2}}$. Dann gilt
$$f'(x) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$$
für alle $x \in (0;\infty)$.

(Affin) Lineare Approximation

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in a differenzierbar ist. Dann können wir die Funktion durch die Tangente

$$t_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$$

annähern. Die Tangente erfüllt also

$$t_a(a) = f(a) \quad \text{und} \quad t_a'(a) = f'(a),$$

d. h. die Tangente t_a besitzt mehr Eigenschaften von f als unsere erste Näherung

$$c_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(a).$$

Beispiel

Betrachte die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - \frac{1}{6}x^3$ im Punkt $a = 1$.
Es gilt

$$f(1) = 1 - \frac{1}{6} \cdot 1^3 = \frac{5}{6},$$

und

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{6} \cdot 3x^{3-1} = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

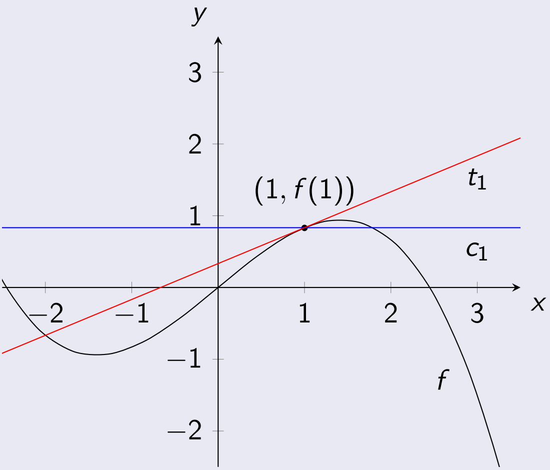
für alle $x \in \mathbb{R}$, sodass

$$f'(1) = 1 - \frac{1}{2}1^2 = \frac{1}{2}.$$

Also ist die Tangente von f im Punkt $a = 1$

$$t_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{5}{6} + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x.$$

Beispiel



Um unsere gegebene Funktion noch besser in einem Punkt approximieren zu können, benötigen wir „höhere“ Ableitungen.

Definition

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Falls f' im Punkt a differenzierbar ist, d. h. der Grenzwert

$$f''(a) := (f')'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

existiert, dann sagen wir, dass f in a *zweimal differenzierbar* ist und nennen $f''(a)$ die *zweite Ableitung von f in a*.

Wir können dies weiterführen und nennen eine Funktion f *n-mal differenzierbar in a* ($n \in \mathbb{N}$), wenn

$$f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h}$$

existiert. Hierbei benutzen wir die Notation $f = f^{(0)}$.

Bemerkung

Durch die zweite Ableitung wird die Krümmung einer Funktion beschrieben.

Beispiel

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x^2+2)$. Es gilt
$$f'(x) = \exp(x^2+2) \cdot (2x) = 2x \exp(x^2+2)$$
und
$$f''(x) = 2\exp(x^2+2) + 2x\exp(x^2+2)(2x) = (2+4x^2)\exp(x^2+2)$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.
2. $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$. Es gilt
$$g'(x) = -\frac{1}{x^2},\ g''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \text{und} \quad g'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$
für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.