Mathematik für Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie

Jens Horn

basierend auf einer Vorlage
von Dominik Schillo

Universität des Saarlandes

20.12.2019

Wir haben in der achten Vorlesung auf Folie 24 gesehen, dass zu $a \in \mathbb{R}$ und einer in a differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Tangente t_a die Gleichungen

$$t_a(a) = f(a) \quad \text{und} \quad t_a'(a) = f'(a)$$

erfüllt. Da die (affin) linearen Funktionen gerade die Polynome mit Grad 1 sind, stellt sich die Frage, ob es Polynome höheren Grades gibt, die die Funktion genauer approximieren.

Frage

Seien $a \in \mathbb{R}$ und f eine in a n-mal differenzierbare Funktion. Gibt es dann ein Polynom p_a n-ten Grades, das

$$p_a(a) = f(a),\ p_a'(a) = f'(a),\ \ldots, p_a^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

erfüllt?

Seien $a \in \mathbb{R}$ und f eine in a dreimal differenzierbare Funktion. Betrachte das Polynom

$$p_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Die Bedingungen

$$p_a(a) = f(a),\ p_a'(a) = f'(a), p_a''(a) = f''(a) \quad \text{und} \quad p_a'''(a) = f'''(a)$$

lieferen die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 &= f(a) = \frac{1}{0!} f''(a), \\ a_1 &= f'(a) = \frac{1}{1!} f''(a), \\ 2a_2 &= f''(a) \Leftrightarrow a_2 = \frac{1}{2} f''(a) = \frac{1}{2!} f''(a), \\ 2 \cdot 3a_3 &= f'''(a) \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{6} f'''(a) = \frac{1}{3!} f'''(a). \end{aligned}$$

Das gesuchte Polynom ist also

$$
\begin{aligned}
p_a : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\
x &\mapsto f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6} f'''(a)(x-a)^3 \\
&= \frac{1}{0!} f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3.
\end{aligned}
$$

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine in a n-mal differenzierbare Funktion.

Definition

Wir nennen das Polynom

$$
\begin{aligned}
T_{f,a,n} : \mathbb{R} \to & \mathbb{R}, \\
x \mapsto & \frac{1}{0!} f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \cdots \\
& \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n \\
& = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k
\end{aligned}
$$

das *n-te Taylorpolynom von f im Punkt a*.

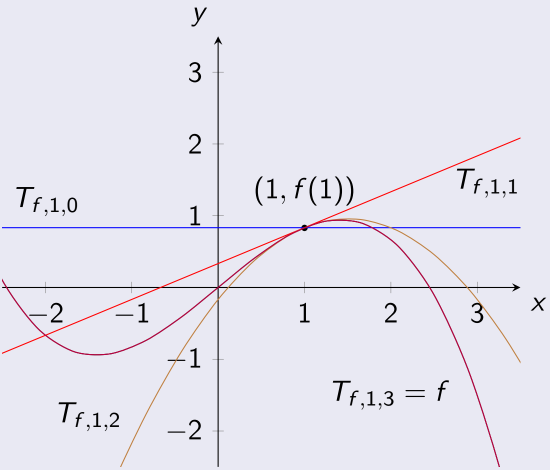
Bemerkung

1. Im Fall $n = 0$ entspricht $T_{f,a,0}$ der konstanten Funktion c_a (vgl. Folie 24, Vorlesung 8).
2. Im Fall $n = 1$ entspricht $T_{f,a,1}$ der Tangente t_a von f im Punkt a.
3. Nach Konstruktion erfüllt $T_{f,a,n}$ die Gleichungen
$$T_{f,a,n}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$
für alle $0 \leq k \leq n$.
4. Ist $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad n, so gilt
$$T_{p,a,n}(x) = p(x)$$
für alle $a \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$, d. h. das n-te Taylorpolynom von p in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$ stimmt mit p überein.

Beispiel

1. Betrachte $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - \frac{1}{6}x^3$ und $a = 1$. Dann gilt
$$f''(x) = -x \quad \text{und} \quad f'''(x) = -1$$
für alle $x \in \mathbb{R}$, sodass
$$f''(1) = -1 \quad \text{und} \quad f'''(1) = -1.$$
Also gilt für das 3-te Taylorpolynom von f im Punkt $a = 1$
$$\begin{aligned} & T_{f,1,3}(x) \\ =& \frac{5}{6} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2!} \cdot (-1) \cdot (x-1)^2 + \frac{1}{3!} \cdot (-1) \cdot (x-1)^3 \\ =& \frac{5}{6} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 - \frac{1}{6} \cdot (x-1)^3 \\ =& f(x) \end{aligned}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel



Beispiel

2 Betrachte die Funktion $g\colon (-1;1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Wir wollen nun das 2-te Taylorpolynom von g in $a = 0$ bestimmen. Es gilt

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{und} \quad g''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

für alle $x \in (-1;1)$,sodass

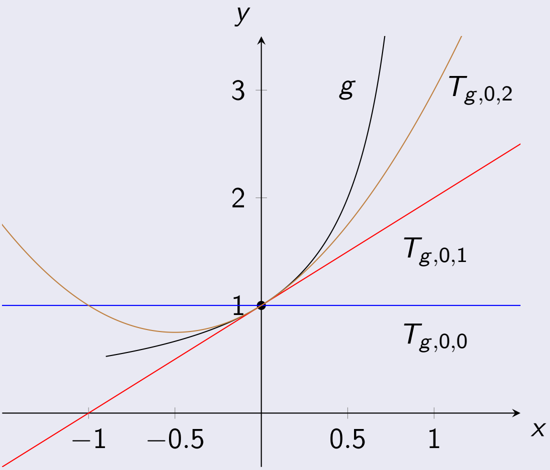
$$g(0) = 1,\ g'(0) = 1 \quad \text{und} \quad g''(0) = 2.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} T_{g,0,2}(x) &= \frac{1}{0!} \cdot 1 + \frac{1}{1!} \cdot 1(x-0) + \frac{1}{2!} \cdot 2(x-0)^2 \\ &= 1 + x + x^2 \end{aligned}$$

für alle $x \in (-1;1)$.

Beispiel



Beispiel

3 Für die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x) = e^x$ gilt

$$\exp^{(k)}(x) = \exp(x)$$

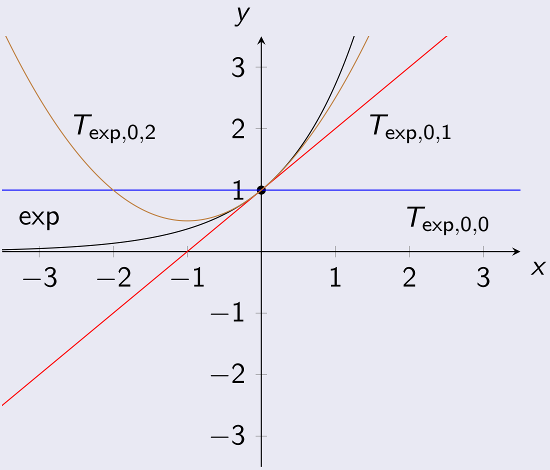
für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$, sodass

$$\exp^{(k)}(0) = 1$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Also gilt für das n-te Taylorpolynom von exp in $a = 0$

$$\begin{aligned} T_{\exp,0,n}(x) &= \frac{1}{0!} \cdot 1 + \frac{1}{1!} \cdot 1(x-0) + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot 1(x-0)^n \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k \qquad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Beispiel



Beispiel

4. Man kann sich überlegen, dass

$$\sin^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Ebenfalls gilt

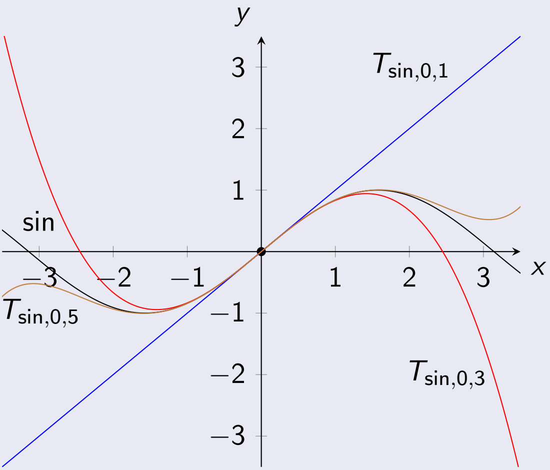
$$\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k \quad \text{und} \quad \cos^{(2k+1)}(0) = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit gilt z.B. für das 3-te Taylorpolynom von sin in $a = 0$

$$T_{\sin,0,3}(x) = x - \frac{1}{6}x^3$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel



Beispiel

5 Betrachte die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\exp(x^2+x)$. Wir wollen das 2-te Taylorpolynom von h im Punkt $a = 0$ bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1\exp(x^2+x) + x\exp(x^2+x)\cdot(2x+1) \\ &= (1+x+2x^2)\exp(x^2+x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &h''(x) \\ =&(1+4x)\exp(x^2+x) + (1+x+2x^2)\exp(x^2+x)\cdot(2x+1) \\ =&(2+7x+4x^2+4x^3)\exp(x^2+x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also folgt

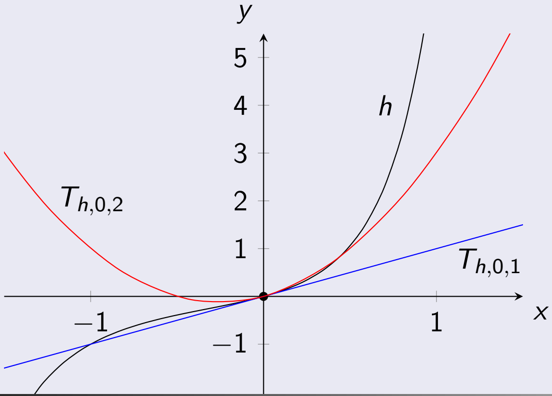
$$h(0) = 0,\ \ h'(0) = 1 \quad \text{und} \quad h''(0) = 2.$$

Beispiel

Also folgt

$$T_{h,0,2}(x) = x + 2x^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.



Taylorreihe (heuristisch)

Ist eine Funktion f in einem Punkt a beliebig oft differenzierbar, so können wir auch die *Taylorreihe* von f im Punkt a betrachten, die dadurch entsteht, dass wir n „gegen unendlich“ laufen lassen:

$$T_{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

für geeignete $x \in \mathbb{R}$. Im Gegensatz zu den Taylorpolynomen muss die Taylorreihe nicht überall existieren; es kann sogar vorkommen, dass diese nur im Punkt a definiert ist.

Beispiel

1. $f\colon (-1;1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{1-x},\ a = 0$:

$$T_{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = f(x)$$

für alle $x \in (-1;1)$.

2. Für die Taylorreihe von cos bzw. sin in $a = 0$ gilt

$$T_{\cos,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos(x)$$

und

$$T_{\sin,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel

3. Für die Taylorreihe von exp in $a = 0$ gilt

$$T_{\exp,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \exp(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

4. Für die Taylorreihe von ln in $a = 1$ gilt

$$T_{\ln,1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k = \ln(x)$$

für alle $x \in (0;2)$.

Im Folgenden möchten wir gerne aus Messdaten Rückschlüsse auf die Gesetzmäßigkeit (Funktion) schließen.

Beispiel

Wir beobachten eine Räuberpopulation auf einer Insel und zählen in der Woche t die Anzahl der Räuber y. Wir erhalten die folgenden Messdaten:

t	1	3	7
y	20	25	16

Finden wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die diese Messdaten *interpoliert*, d. h.

$$f(1) = 20, \; f(3) = 25 \text{ und } f(7) = 16$$

erfüllt?

Die einfachsten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind Polynome. Falls wir $n+1$ Messdaten $(t_1, y_1), \ldots, (t_{n+1}, y_{n+1})$ haben, nehmen wir ein Polynom p vom Grad n:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Beispiel

Im vorherigen Beispiel betrachten wir also ein Polynom 2-ten Grades, da wir $3 = 2 + 1$ Messdaten haben:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 20 &= p(1) = a_0 + a_1 + a_2, \\ 25 &= p(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2, \\ 16 &= p(7) = a_0 + 7a_1 + 49a_2. \end{aligned}$$

Beispiel

In Matrixschreibweise lautet dieses:

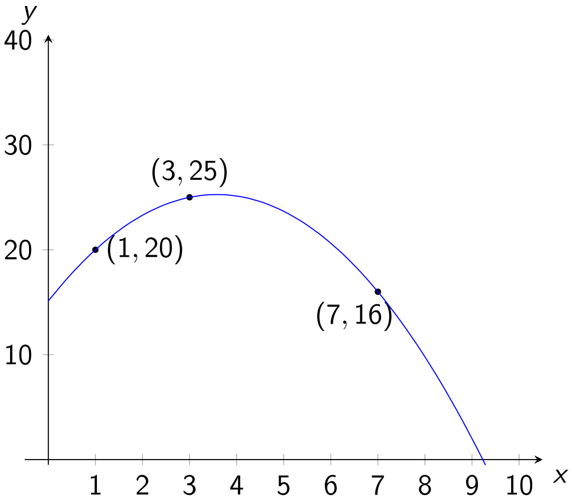
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 9 & 25 \\ 1 & 7 & 49 & 16 \end{array}\right).$$

Die Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{121}{8} \\ \frac{17}{3} \\ -\frac{19}{24} \end{pmatrix},$$

sodass

$$p(x) = \frac{121}{8} + \frac{17}{3}x - \frac{19}{24}x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$


y
40
30
20
10
(3, 25)
(1, 20)
(7, 16)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
x

Beispiel

Wir beobachten nun weiter und erhalten die Messdaten:

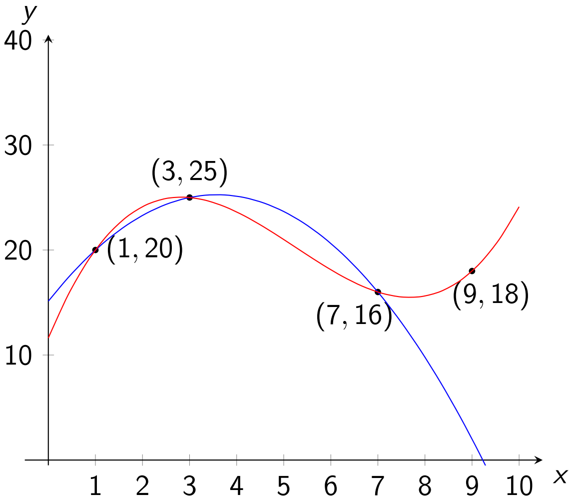
t	1	3	7	9
y	20	25	16	18

Das zugehörige lineare Gleichungssystem für ein Polynom q 3-ten Grades lautet

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 25 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & 16 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & 18 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{93}{8} \\ \frac{65}{6} \\ -\frac{21}{8} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

sodass

$$q(x) = \frac{93}{8} + \frac{65}{6}x - \frac{21}{8}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$


y
40
30
20
10
(3, 25)
(1, 20)
(7, 16)
(9, 18)
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x

Wir betrachten nochmal die Funktion
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \exp(x^2 + x)$ und sei $n \in \mathbb{N}$. Da das n-te Taylorpolynom von exp in 0 das Polynom

$$T_{\exp,0,n} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} y^k$$

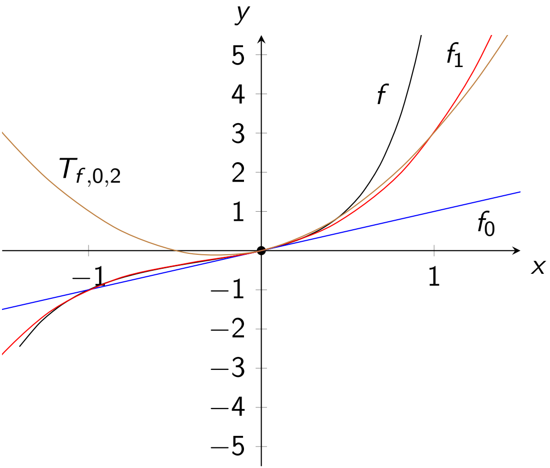
ist, können wir f durch das Polynom

$$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (x^2 + x)^k \right)$$

in 0 approximieren. Wir haben also

$$f_0(x) = x,\ f_1(x) = x(1 + (x^2 + x)) = x + x^2 + x^3,\ \ldots$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.


y
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−1
1
x
f
f1
f0
Tf,0,2

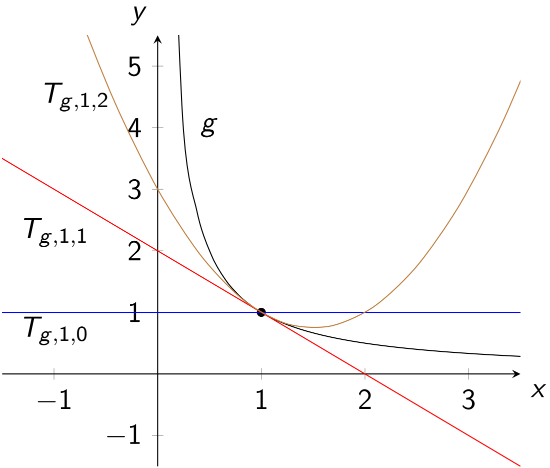
Wir wollen nun die Taylorreihe von $g\colon (0;\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 1$ bestimmen. Nach Folie 18 gilt

$$T_{g,1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \frac{1}{1-(-(x-1))} = \sum_{k=0}^{\infty}(-(x-1))^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x-1)^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < 1$ bzw. $x \in (0;2)$. Damit erhalten wir die Taylorpolynome

$$T_{g,1,0}(x) = 1,$$
$$T_{g,1,1}(x) = 1-(x-1),$$
$$T_{g,1,2}(x) = 1-(x-1)+(x-1)^2,$$
$$\dots$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.


y
x
g
$T_{g,1,2}$
$T_{g,1,1}$
$T_{g,1,0}$
5
4
3
2
1
−1
−1
1
2
3

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr!