



Analysis I (WS 2020/21)

Übungsblatt 1

Abgabe: Freitag, den 13.11.2020.

---

**Aufgabe 1 (4+8+2=14 Punkte)**

a) Betrachten Sie die Teilmengen

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\},$$

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\},$$

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, 0 < y\}.$$

Skizzieren Sie die Mengen

$$(i) \ B \cap C, \quad (ii) \ A - B, \quad (iii) \ A - C, \quad (iv) \ A - (B \cup C).$$

b) Seien  $L, M$  und  $N$  beliebige Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

$$(i) \ L - (M \cup N) = (L - M) - N,$$

$$(ii) \ L - (M \cup N) = (L - M) \cup (L - N),$$

$$(iii) \ M \cap N = (M \cup N) - ((M - N) \cup (N - M)),$$

$$(iv) \ M \cup N = (M \cap N) - ((M - N) \cap (N - M)).$$

*Bemerkung:* Es ist hilfreich, sich den Sachverhalt zunächst an den Mengendiagrammen aus Aufgabenteil a) zu veranschaulichen. **Dies ersetzt jedoch keinen Beweis!**

c) Gegeben seien die Mengen

$$S_1 := \emptyset, \quad S_2 := \{\emptyset\}, \quad S_3 := \{\{\emptyset\}\}, \quad S_4 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Welche der Mengen  $S_1, \dots, S_4$  sind Element oder Teilmengen von  $S_4$ ?

**Aufgabe 2 (4+10=14 Punkte)**

a) Geben Sie Mengen  $U \subset \mathbb{R}$  und  $B \subset \mathbb{R}$  an, sodass die Abbildung

$$f : U \rightarrow B, \quad x \mapsto |x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

die folgenden Eigenschaften hat und begründen Sie Ihre Antwort.

- (i)  $f$  ist surjektiv, aber nicht injektiv.    (iii)  $f$  ist weder surjektiv noch injektiv.  
(ii)  $f$  ist injektiv, aber nicht surjektiv.    (iv)  $f$  ist bijektiv.

b) Seien  $X, Y$  zwei Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Zeigen Sie, dass für Teilmengen  $A, B \subset X$  und  $A', B' \subset Y$  gilt:

(i)  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .

(ii)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

(iii)  $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$ .

(iv)  $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$ .

Gilt in (i) Gleichheit? (Beweis oder Gegenbeispiel)

### Aufgabe 3 (3×4=12 Punkte)

Seien  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , beliebige Mengen. Zeigen Sie:

a)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \bigcap_{m=1}^n X_m \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{m=1}^n X_m \right) = X_1$ .

b)  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \bigcup_{m=n}^{\infty} X_m \right) = \{x : x \in X_n \text{ für unendlich viele } n\}$ .

c)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \bigcap_{m=n}^{\infty} X_m \right) = \{x : x \notin X_n \text{ für höchstens endlich viele } n\}$ .