**Universität des Saarlandes**
**Fachrichtung 6.1 -Mathematik**
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

**Analysis I (WS 2020/21)**
**Übungsblatt 10**
Abgabe: Freitag, den 29.01.2021.

---

## Aufgabe 1 (3+3=6 Punkte)

Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$;

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $f$ differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung $f' : [-1, 1] \to \mathbb{R}$.

b) Untersuchen Sie die Ableitung $f' : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

## Aufgabe 2 (6+3=9 Punkte)

a) Seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ auf $I$ $n-$mal differenzierbar. Zeigen Sie: Es gilt $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $x \in I$ genau dann, wenn $f$ ein Polynom vom Grad $< n$ ist.

[*Hinweis*: Zeigen Sie die Aussage mit vollständiger Induktion und verwenden Sie den Mittelwertsatz.]

b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit $f''(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass

$$\sup_{x \in (a,b)} f(x) \leq \max\{f(a), f(b)\}.$$

## Aufgabe 3 (4+4=8 Punkte)

a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $f'(a)f'(b) < 0$. Zeigen Sie, dass dann die Ableitung $f'$ auf $(a, b)$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

b) Zeigen Sie für $0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung die folgende Ungleichung:

$$\exp(x^2) \leq \frac{1}{1 - 2x^2}.$$

**Aufgabe 4 (2+3+3=8 Punkte)**

Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left( \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right).$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{a^{\log(x)} - x}{\log(x)}$ für $a > 0$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}.$

**Aufgabe 5 (3+3+3=9 Punkte)**

a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Summe zweier konvexer Funktionen wieder eine konvexe Funktion ist.

b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass das Produkt zweier konvexer Funktionen wieder eine konvexe Funktion ist.

c) Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ zwei nichtleere Intervalle, $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen und $g$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ konvex ist.