Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 -Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Analysis I (WS 2020/21)
Übungsblatt 3
Abgabe: Freitag, den 27.11.2020.

Aufgabe 1 (5+5=10 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Ungleichung

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

für alle reellen Zahlen x, y richtig ist, und, dass die Ungleichung

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$$

für alle positiven reellen Zahlen x, y richtig ist.

Aufgabe 2 (4+4=8 Punkte)

Es seien A, B nichtleere, nichtdisjunkte Teilmengen des $\mathbb{R}$, die nach oben beschränkt sind. Beweisen Sie, dass $\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}$ und $\sup A \cap B \leq \min\{\sup A, \sup B\}$. Geben Sie Teilmengen A, B von $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\sup A \cap B < \min\{\sup A, \sup B\}$ an.

Aufgabe 3 (6+6=12 Punkte)

Es seien A, B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $A \subset B$. Die Menge A heißt *nach oben beschränkt in* B, falls es ein Element $b \in B$ mit $a \leq b$ für alle $a \in A$ gibt. In diesem Fall ist b eine *obere Schranke für* A *in* B. Falls es eine kleinste obere Schranke für A in B gibt, ist diese das *Supremum für* A *in* B und wird mit $\sup_B A$ bezeichnet.

a) Es seien A und B nichtleere Mengen mit $A \subset B \subset \mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

- **(i)** Ist A nach oben beschränkt in B, so ist A nach oben beschränkt in $\mathbb{Q}$.
- **(ii)** Existieren beide Suprema, so gilt $\sup_{\mathbb{Q}} A \leq \sup_B A$.

b) Geben Sie nichtleere Mengen A und B mit $A \subset B \subset \mathbb{Q}$ mit den folgenden Eigenschaften an:

(i) A ist nach oben beschränkt in $\mathbb{Q}$, aber nicht nach oben beschränkt in B;

(ii) A ist nach oben beschränkt in B, $\sup_{\mathbb{Q}} A$ existiert, aber $\sup_B A$ existiert nicht;

(iii) A is nach oben beschränkt in B, $\sup_B A$ existiert, aber $\sup_{\mathbb{Q}} A$ existiert nicht;

(iv) $\sup_B A$ und $\sup_{\mathbb{Q}} A$ existieren, aber sind nicht gleich.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Beweisen Sie, dass das Vollständigkeitsaxiom und die "Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$" äquivalent sind.

[*Hinweis*: Zeigen Sie in der Rückrichtung mit Hilfe der Supremumseigenschaft, dass jede Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für gewisse $a \leq b$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$ erfüllt. Zeigen Sie danach, dass schon $a = b$ gilt und folgern Sie daraus die Behauptung.]