



Analysis I (WS 2020/21)

Übungsblatt 4

Abgabe: Freitag, den 04.12.2020.

Aufgabe 1 (2+2+2=6 Punkte)

Seien $f : Y \rightarrow Z$ und $g : X \rightarrow Y$ Abbildungen und $h := f \circ g$ die Komposition von f und g . Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Implikationen:

- (i) f und g sind injektiv. $\Rightarrow h$ ist injektiv.
- (ii) f und g sind surjektiv. $\Rightarrow h$ ist surjektiv.
- (iii) f und g sind bijektiv. $\Rightarrow h$ ist bijektiv.

Aufgabe 2 (4+5+5=14 Punkte)

- (i) Beweisen Sie, dass die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ebenfalls abzählbar ist.
- (ii) Seien $k \in \mathbb{N}$ und M_1, \dots, M_k abzählbare Mengen. Beweisen Sie, dass auch

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k = \{(m_1, m_2, \dots, m_k); m_i \in M_i \text{ für } 1 \leq i \leq k\}$$

abzählbar ist. [*Hinweis*: Beweisen Sie die Aussage zunächst für den Fall $k = 2$.]

- (iii) Beweisen Sie, dass die Menge aller endlichen Teilmengen von \mathbb{N} abzählbar ist.

Aufgabe 3 (3+3+3=9 Punkte)

Bestimmen Sie alle $z, w \in \mathbb{C}$ so, dass die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

- (i) $iz - 3w = 1$ und $z + iw = i$
- (ii) $z^2 + (1 + i)z + i = 0$
- (iii) $z^2 + \bar{z}^2 + z - \bar{z} - 6 - 2i = 0$.

Aufgabe 4 (4+4+3=11 Punkte)

- (i) Sei $r \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie dass $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^r$ für $r > 0$ streng monoton wachsend und für $r < 0$ streng monoton fallend ist.

[*Hinweis*: Es ist $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.]

- (ii) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Gilt hier “ $<$ “, wenn $a_n < b_n$ für fast alle n ist? (Beweis oder Gegenbeispiel.)

[*Hinweis*: Wählen Sie eine geeignete Nullfolge.]

- (iii) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.