



Analysis I (WS 2020/21)

Übungsblatt 6

Abgabe: Freitag, den 18.12.2020.

Aufgabe 1 (6+3=9 Punkte)

(i) Zeigen Sie das Kondensationskriterium:

Es sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver Zahlen. Zeigen Sie, dass die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ entweder beide konvergieren oder beide divergieren.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $q > 1$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-q}$$

konvergiert.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass

$$|a_n| \leq \left(1 - \frac{c}{n}\right) |a_{n-1}|$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt mit einer von n unabhängigen Konstante $c > 1$. Beweisen Sie die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Aufgabe 3 (4+4=8 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

konvergiert und bestimmen Sie ihre Summe.

[Hinweis: Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch.]

(ii) Sei $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert und das Cauchy-Produkt der Reihe mit sich selbst divergiert.

Aufgabe 4 (2+2+2+2=8 Punkte)

Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + 1/k)^k} \quad (ii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{\sqrt{k^4 + k}} \quad (iii) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{3^k} \quad (iv) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$$

Aufgabe 5 (2+2+2=6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Potenzreihen

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} n z^n, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ divergieren und mit $|z| < 1$ konvergieren. Prüfen Sie das Konvergenzverhalten in den Punkten $z = -1$ und $z = 1$.

**Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten
und einen guten Start ins neue Jahr!**