



Analysis I (WS 2020/21)

Übungsblatt 7

Abgabe: Freitag, den 08.01.2021.

Aufgabe 1 (2+2+2=6 Punkte)

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{2n} (z-2)^n \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) (z-4)^n \quad (iii) \sum_{n=0}^{\infty} (4n^3 - 3n^4) z^n.$$

Aufgabe 2 (6+2=8 Punkte)

(i) Seien $D_R(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ für $R > 0$, $f : D_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

wobei $f(z)$ konvergent auf $D_R(0)$ ist, und $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sqrt{x}$. Zeigen Sie, dass g nicht Lipschitz-stetig ist und beweisen Sie, dass f eine Lipschitz-Bedingung erfüllt auf $D_r(0)$ für alle r mit $r < R$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x + x^{100} - 1 = 0$$

eine Lösung im Intervall $[-2, 2]$ hat.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und die Lipschitz-Konstante von f echt kleiner als 1. Zeigen Sie, dass es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ gibt (x heißt dann **Fixpunkt**).

[Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} := f(x_n)$, $x_1 \in \mathbb{R}$ beliebig und zeigen Sie, dass es sich um eine Cauchy-Folge handelt.]

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{\frac{n}{s}} = e$$

für alle $s > 0$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{s}{n}\right)^{\frac{n}{-s}} = e$$

für alle $s < 0$ gilt. Folgern Sie daraus, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 5 (3+3=6 Punkte)

- (i) Bestimmen Sie alle Werte von $\gamma \in \mathbb{C}$ für die 2^γ rein imaginär und für die 2^γ reell ist.
- (ii) Berechnen Sie $(1 + i)^8$.