Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 -Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

Analysis I (WS 2020/21)
Übungsblatt 9
Abgabe: Freitag, den 22.01.2021.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Seien $D \subset \mathbb{C}$ nichtleer und $a \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von D. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es existiert eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $z_n \neq a$ und $z_n \longrightarrow a$.

(ii) In jeder Umgebung U von a liegen unendlich viele Elemente von D.

(iii) In jeder Umgebung U von a gibt es einen Punkt $z \in D$ mit $z \neq a$.

Aufgabe 2 (6+10+4=20 Punkte)

(i) Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Zeigen Sie, dass f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt.

[*Hinweis*: Drücken Sie die Menge aller Sprungstellen (warum sind die Unstetigkeitsstellen ausschließlich Sprungstellen?) als abzählbare Vereinigung von bestimmten Mengen aus und zeigen Sie, dass in jeder dieser Mengen nur endlich viele Elemente enthalten sind.]

(ii) Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer mit Abschluss $\overline{D}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Zeigen Sie:

a) f besitzt eine gleichmäßig stetige Fortsetzung $\overline{f}$ nach $\overline{D}$ und diese ist eindeutig.

b) Ist D beschränkt, so ist f beschränkt.

(iii) Seien $D \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

[*Hinweis*: Argumentieren Sie indirekt!]

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad \leq \quad \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \quad \leq \quad \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

für alle $x < y < z$ aus I.

[*Hinweis*: Wählen Sie t in beiden Richtungen geeignet.]

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

(i) Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in D n-mal stetig differenzierbare Funktionen. Man beweise durch vollständige Induktion nach n die folgende Beziehung:

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

(ii) Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

existiert mit Wert $f'(x_0)$. Folgt umgekehrt aus der Existenz des Limes die Differenzierbarkeit von f an der Stelle x_0?