Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Christian Tietz, M.Sc.

Hauptklausur zur Analysis I (WS 2011/2012)

Aufgabe 1 (3+5+4=12 Punkte)

a) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log(k^{\log(k+1)})}$.

b) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv, so ist auch $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

c) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen, so dass $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $b > 0$ konvergiert. Beweisen Sie, dass $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.

Aufgabe 2 (5+3=8 Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ werde rekursiv definiert durch

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}), \qquad n \geq 2.$$

a) Beweisen Sie induktiv, dass

$$a_{n+1} - a_n = (-1)^n 2^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

gilt (Induktionsschluss: "$k \to n+1$" für $k = 0, 1, ..., n$). Begründen Sie zudem, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge ist.

b) Verifizieren Sie, dass

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^{-k}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Welchen Wert erhält man also für $\lim_{n\to\infty} a_n$?

Aufgabe 3 (2+4+(3+3)=12 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{3n}{2n} z^n, z \in \mathbb{C}$.

b) Sei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ sei r mit $r \in (0, \infty)$. Man zeige, dass die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{2k}, \quad z \in \mathbb{C}$$

den Konvergenzradius $\sqrt{r}$ hat.

Bitte wenden!!!

c) Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n^2+2n}}$. ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh(n)}$.

Aufgabe 4 (3+4+3=10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2})$. b) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{7}}$.

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)+x}{\log(x+1)}$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter gelten $f^2(x) = g^2(x)$ und $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass entweder $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ oder $f(x) = -g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ gelten muss. Verifizieren Sie durch ein Beispiel, dass die Forderung der Nullstellenfreiheit von f wesentlich ist.

Aufgabe 6 (6+6=12 Punkte)

a) Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(0) = 0$ und monoton wachsender Ableitung f'. Zeigen Sie, dass $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{f(x)}{x}$ monoton wächst.

b) Sei $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x^2)$. Beweisen Sie, dass f einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Aufgabe 7 (Zusatzaufgabe) (3+4+3=10 Punkte)

a) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f = g$ auf $\mathbb{Q}$. Man zeige, dass dann $f = g$ auf $\mathbb{R}$ gilt.

b) Beweisen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, so ist $f^{-1}(A) := \{x \in \mathbb{R};\ f(x) \in A\}$ ebenfalls abgeschlossen.

c) Begründen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass die Bilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Funktionen nicht notwenig abgeschlossen sein müssen.

Ende der Klausur!