Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 -Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M. Sc.

1. Klausur zur Analysis I (WS 2020/21)

Dienstag, den 09.02.2021.

Aufgabe 1 (3+3+4=10 Punkte)

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle konvergente Folge.

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine beschränkte Folge ist.

(ii) Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv definiert durch

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}), \qquad n \geq 2.$$

a) Beweisen Sie induktiv, dass

$$a_{n+1} - a_n = (-1)^n 2^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

gilt (Induktionsschluss: "$k \to n+1$"für $k = 0, 1, ..., n$).

b) Betrachten Sie $|a_m - a_n|$ für $m > n$ und folgern Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge ist.

Aufgabe 2 (5+5=10 Punkte)

(i) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit der Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c,$$

wobei $c > 0$ eine positive reelle Zahl ist.

Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann konvergiert, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert.

(ii) Sei $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positive reeller Zahlen. Folgern Sie mit **(i)**, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ genau dann konvergiert, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + d_k)$$

konvergiert.

Aufgabe 3 (6+4=10 Punkte)

(i) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\textbf{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{1+n^2} \right)^n \qquad \textbf{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

[*Hinweis*: Verwenden Sie für **(b)** den Aufgabenteil **(ii)** von Aufgabe 2.]

(ii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}$, wobei r eine positive reelle Zahl ist.

Zeigen Sie, dass die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

Konvergenzradius $\sqrt{r}$ hat.

Aufgabe 4 (3+3+4=10 Punkte)

(i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Hölder-stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f auch gleichmäßig stetig ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Summe zweier konvexer Funktionen wieder eine konvexe Funktion ist.

(iii) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f = g$ auf $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dann $f = g$ auf $\mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 5 (4+6=10 Punkte)

(i) Wie oft ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \mathrm{e}^x, & x \geq 0, \\ -x^2 \mathrm{e}^{-x}, & x < 0, \end{cases}$$

in 0 differenzierbar?

(ii) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\cos x = 2x$$

genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ besitzt.

[*Hinweis*: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz und Mittelwertsatz.]

Aufgabe 6 (3+3+4=10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(i) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{3x^3 + 2x^2 + 1}$.

(ii) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+9} - \sqrt{4x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{8}}$.

(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\sin(x)}$.