1. (i) Es gilt $2^1 = 2 \geq 1 = 1^2$, $2^2 = 4 \geq 4 = 2^2$, $2^3 = 8 < 9 = 3^2$.

Es gilt $2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$. (Induktionsanfang)

Gelte die Formel für ein $n \geq 4$. (Induktionsvoraussetzung)

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\
&= 2n^2 - n^2 + 2n + 1 \\
&= 2n^2 \underbrace{-(n-1)^2 + 2}_{\leq 0 \text{ für } n \geq 4} \\
&\leq 2n^2 \\
&\leq 2 \cdot 2^n \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= 2^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Damit gilt die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N} - \{3\}$. [4]

(ii) Es gilt $3^{2^1} = 9 \geq 8 = 2^{3^1}$ und $3^{2^2} = 3^4 \leq 4^4 \leq 4^4 \cdot 2 = 2^{3^2}$.

Schluss von n auf $n+1$ für $n \geq 2$:

Es gilt

$$
\begin{aligned}
3^{2^{n+1}} &= 3^{2^n \cdot 2} \\
&= \left(3^{2^n}\right)^2 \\
&\leq \left(3^{2^n}\right)^3 \\
&\leq \left(2^{3^n}\right)^3 \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= 2^{3^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Damit gilt 3^{2^n} 2^{3^n} für alle $n \geq 2$. [4]

(iii) Es gilt $2^1 = 2 > 1!$, $2^2 = 4 > 2!$, $2^3 = 8 > 3!$, $2^4 = 16 < 32 = 4!$.

Schluss von n auf $n+1$ für $n \geq 4$:

Es gilt

$$
\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\
&< 2 \cdot n! \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&< (n+1) \cdot n! \quad (2 < n+1 \text{ für } n \geq 4) \\
&= (n+1)!
\end{aligned}
$$

Damit gilt die Ungleichung für alle $n \geq 4$. [4]

2. (i) Es gilt $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$.

Schluss von n auf $n+1$ für $n \geq 1$:

Es gilt
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3$$
$$= (n+1)^3 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)}$$
$$= \frac{4(n+1)(n+1)^2 + n^2(n+1)^2}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(4(n+1) + n^2)}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$
[4]

(ii) Es gilt $\sum_{k=1}^{1} (-1)^k k^2 = (-1) = (-1)^1 \binom{1+1}{2}$.

Schluss von n auf $n+1$ für $n \geq 1$:

Es gilt
$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 = (-1)^{n+1}(n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)}$$
$$= (-1)^{n+1}(n+1)^2 + (-1)^n \binom{n+1}{2}$$
$$= (-1)^{n+1}\left((n+1)^2 - \binom{n+1}{2}\right)$$
$$= (-1)^{n+1}\left((n+1)n + n+1 - \binom{n+1}{2}\right)$$
$$= (-1)^{n+1}\left((n+1)n + n+1 - \frac{(n+1)n}{2}\right)$$
$$= (-1)^{n+1}\left(n+1 + \frac{(n+1)n}{2}\right)$$
$$= (-1)^{n+1}\left(\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2}\right)$$
$$= (-1)^{n+1}\binom{n+2}{2}.$$
(siehe S64) [4]

(iii) Es gilt $\prod_{i=1}^{1} (2i-1) = 1 = \frac{(2\cdot 1)!}{2^1 \cdot 1!}$.

Schluss von n auf $n+1$ für $n > 1$:

Es gilt
$$\prod_{i=1}^{n+1} (2i-1) = (2(n+1)-1) \cdot \prod_{i=1}^{n} (2i-1)$$
$$= (2(n+1)-1) \cdot \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$= \frac{2(n+1)(2(n+1)-1)}{2\ (n+1)} \cdot \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$= \frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}(n+1)!}\ .$$ [4]

3.(i) Es gilt

$$\frac{5}{5x-1} < \frac{2}{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{5x-1} - \frac{2}{2x+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{(5x-1)(2x+1)} < 0$$

und $5x-1>0$ für $x>1/5$, $5x-1<0$ für $x<1/5$,

$2x+1>0$ für $x>-1/2$, $2x+1<0$ für $x<-1/2$.

Damit ist

$$\left\{x : \frac{5}{5x-1} < \frac{2}{2x+1}\right\} = (-1/2, 1/5).$$ [3]

(ii) Es gilt

$$\frac{3x+2}{2x+3} < \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow 0 > \frac{3x}{2x+3} - \frac{x}{x+1} = \frac{(x+1)^2+1}{(2x+3)(x+1)}$$

und $2x+3>0$ für $x>-3/2$, $2x+3<0$ für $x<-3/2$,

$x+1>0$ für $x>-1$, $x+1<0$ für $x<-1$.

Damit ist

$$\left\{x : \frac{3x+2}{2x+3} < \frac{x}{x+1}\right\} = (-3/2, -1).$$ [3]

(iii) Es gilt

$$\left|\frac{(x-1)(2x-3)}{x(x-5)}\right| > 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{(x-1)(2x-3)}{x(x-5)} < -1 \quad \text{oder} \quad \frac{(x-1)(2x-3)}{x(x-5)} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x-1)(x-3)}{x(x-5)} < 0 \qquad \Leftrightarrow \frac{x^2+3}{x(x-5)} > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1/3 \qquad \Leftrightarrow x < 0$$

oder $3 < x < 5$ oder $x > 5$

Damit ist

$$\left\{x: \left|\frac{(x-1)(2x-3)}{x(x-5)}\right| > 1\right\} = (-\infty,0) \cup (0,1/3) \cup (3,5) \cup (5,\infty).$$

[5]

4. Es gilt $(1+1.x) = (1+x)^1$ für alle x.

Schluss von n auf $n+1$ für $n \geq 1$:

Es gilt
$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) \quad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \quad (x^2 \geq 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}) \\ &\geq 1+(n+1)x\end{aligned}$$

für alle $x \geq -1$.

[5]