1. Es gilt

$$(1+|x|)(1+|y|)(1+|x+y|)>0$$

für alle $x,y\in\mathbb{R}$. Damit erhalten wir

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|}\leq\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}$$

$$\Leftrightarrow (1+|x|)(1+|y|)|x+y|\leq |x|(1+|y|)(1+|x+y|)+|y|(1+|x|)(1+|x+y|)$$

$$\Leftrightarrow |x+y|+|x||x+y|+|y||x+y|+|x||y||x+y|$$

$$\leq |x|+|y|+|x||x+y|+|y||x+y|+2|x||y||x+y|+2|x||y|$$

$$\Leftrightarrow |x+y|\leq |x|+|y|+|x||y||x+y|+2|x||y| \qquad (*)$$

Nun gilt

$$|x+y|\leq |x|+|y|$$

$$\leq |x|+|y|+\underbrace{|x||y||x+y|+2|x||y|}_{\geq 0}$$

und folglich die Ungleichung (*) sowie

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|}\leq\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}. \qquad [5]$$

Es gilt $xy>0$ für $x,y>0$ und folglich

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geq x+y$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3+y^3 \geq x^2y+y^2x$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+y)^3 \geq 4xy(x+y)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+y)^2 \geq 4xy$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-y)^2 \geq 0. \qquad [5]$$

2. Sei $x \in A \cup B$. Dann ist $x \in A$ oder $x \in B$ und folglich ist $x \leq \sup A$ oder $x \leq \sup B$, sodass $x \leq \max(\sup A, \sup B)$. Es gilt $\sup A \leq \sup B$ oder $\sup B \leq \sup A$. Sei nun $\sup A \leq \sup B$.

Dann ist $\sup B$ eine obere Schranke für $A \cup B$. Nach Definition ist $\sup B$ die kleinste obere Schranke für $B$, sodass $s$ mit $s < \sup B$ keine obere Schranke für $B$ und folglich keine für $A \cup B$ ist. Damit ist $\sup B$ die kleinste obere Schranke für $A \cup B$.

[4]

Sei $x \in A \cap B$. Dann ist $x \in A$ und $x \in B$ und folglich ist $x \leq \sup A$ und $x \leq \sup B$, sodass $x \leq \min(\sup A, \sup B)$. Nun ist $\min(\sup A, \sup B)$ eine weitere obere Schranke und nach Definition ist $\sup A \cap B \leq \min(\sup A, \sup B)$.

[3]

Sei $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$. Dann ist $A \cap B = \{1\}$ und

$$1 = \sup A \cap B < \min(\sup A, \sup B) = 2 .$$

[1]

3. a) (i) Es gibt ein $b \in B$ mit $a \leq b$ für alle $a \in A$. Nun ist $B \subset \mathbb{Q}$, sodass $b \in \mathbb{Q}$ und es gilt eben $a \leq b$ für alle $a \in A$.

[2]

(ii) Nach (i) ist jede Schranke in $B$ eine Schranke in $\mathbb{Q}$. Es ist $\sup_B A$ eine weitere obere Schranke von $A$ in $\mathbb{Q}$ und $\sup_{\mathbb{Q}} A$ die kleinste obere Schranke von $A$ in $\mathbb{Q}$, sodass

$$\sup_{\mathbb{Q}} A \leq \sup_B A .$$

[4]

b) (i) Seien $A = B = (1,2) \cap \mathbb{Q}$. Es gilt $\sup_{\mathbb{Q}} A = 2$ und $2 \notin B$. [1]

(ii) Seien $A = (1,2) \cap \mathbb{Q}$, $B = ((1,3) \cap \mathbb{Q}) \setminus \{2\}$. Es gilt $\sup_{\mathbb{Q}} A = 2$ sowie $2 \notin B$ und jedes $b \in B$ mit $2 < b$ ist eine obere Schranke in $B$ für $A$. [2]

(iii) Seien $A = (3, \pi) \cap \mathbb{Q}$, $B = A \cup \{4\}$. Es gilt $\pi \notin \mathbb{Q}$ und $\sup_B A = 4$. [2]

(iv) Seien $A = (1,2) \cap \mathbb{Q}$, $B = A \cup \{3\}$. Dann ist $\sup_{\mathbb{Q}} A = 2$ und $\sup_B A = 3$. [1]

4. <u>Die Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$ (S):</u>

Sei $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben (unten) beschränkt. Dann hat $M$ ein Supremum (Infimum).

<u>Das Vollständigkeitsaxiom (V):</u>

Ist $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. So gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Wir zeigen (V) $\Rightarrow$ (S).

Sei $M \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Wir definieren rekursiv $I_n := [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ wie folgt:

Sei $a_1 := a - 1$ für ein beliebiges $a \in M$ und $b_1 :=$ eine obere Schranke von $M$.

Seien $[a_1, b_1], \_\_\_, [a_n, b_n]$ konstruiert mit

$(1)_l$ $a_l$ keine obere Schranke von $M$,

$(2)_l$ $b_l$ obere Schranke von $M$,

$(3)_l$ $I_l \subset I_{l-1}$,

$(4)_l$ $|I_l| \leq \frac{1}{2} |I_{l-1}|$, für $l = 1, \dots, n$.

Es gilt $(1)_1$, $(2)_1$. Dann sei $I_{n+1}$ wie folgt definiert. Setze $x = \frac{a_n + b_n}{2}$.

<u>Fall 1:</u> $x$ ist obere Schranke. Dann ist $I_{n+1} := [a_n, x]$.

<u>Fall 2:</u> $x$ ist keine obere Schranke. Dann ist $I_{n+1} := [x, b_n]$.

Dann ist $(1)_n - (4)_n$ richtig für alle $n$ und $\{I_n\}$ ist eine Intervallschachtelung. Nach dem Vollständigkeitsaxiom gibt es nun ein $s \in \mathbb{R}$ mit $s \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

a) $s$ ist obere Schranke von $M$. Falls nicht gibt es $y \in M$ mit $y > s$. Wähle $n$ so, dass $|I_n| = |b_n - a_n| < y - s$. Da $s \in I_n$ ist, folgt $b_n - s \leq b_n - a_n < y - s$. Damit ist $b_n < y$; aber $b_n$ ist eine obere Schranke und wir haben einen Widerspruch.

b) $s$ ist die kleinste obere Schranke. Falls nicht, so gibt es ein obere Schranke $\hat{s} < s$. Wähle $n$ so, dass $|I_n| = |b_n - a_n| < s - \hat{s}$. Da $s \in I_n$ ist, folgt $s - a_n \leq b_n - a_n < s - \hat{s}$ und somit $a_n > \hat{s}$. Damit ist $a_n$ eine obere Schranke von $M$ und dies ist ein Widerspruch zu $(1)_n$.

Aus a), b) folgt nach Definition $s = \sup M$. (siehe Skript S. 108-112)

(Die Aussage über das Infimum erhalten wir analog indem wir bei der Konstruktion der Intervalle "$a_k$ ist untere Schranke, $b_k$ ist keine untere Schranke, ..." betrachten.) [5]

Wir zeigen $(S) \Rightarrow (V)$:

Sei $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung mit $I_n := [a_n, b_n]$ und $a_n \leq b_n$.
Es gilt $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1 \qquad (*)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $A := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben und $B = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nach unten beschränkt. Nach der Supremumseigenschaft gibt es $a, b$ mit $\sup A = a$, $\inf B = b$.

Sei $a > b_k$ für ein $k$. Nach (*) ist $b_k$ auch eine obere Schranke für $A$ und kleiner als $a$. Das steht im Widerspruch dazu, dass $a = \sup A$ ist.
Sei $b < a_k$ für ein $k$. Dann erhalten wir ebenfalls ein Widerspruch.
Folglich ist $[a,b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ und wir zeigen nun, dass $a=b$ ist.

Sei $a \neq b$. Dann gilt $0 < |a-b| \leq |a_n - b_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gibt zu $\varepsilon < |a-b|$ kein $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - b_n| < \varepsilon$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist.

[5]