1. (i) Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $h(x_1) = h(x_2)$. Dann ist $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$ und somit $g(x_1) = g(x_2)$, da f injektiv ist, sowie $x_1 = x_2$, da g injektiv ist.

(ii) Sei $z \in Z$. Dann gibt es ein $y \in Y$ mit $f(y) = z$, da f surjektiv ist, und es gibt ein $x \in X$ mit $g(x) = y$, da g surjektiv ist. Damit gibt es ein $x \in X$ mit $h(x) = f(g(x)) = z$.

(iii) Mit (i) und (ii) folgt die Aussage. [6]

2. (i) Sei $\{A_n\}$ eine Folge abzählbarer Mengen. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Bijektion $f_n : \mathbb{N} \to A_n$ und wir definieren die Funktion $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ durch $g(n,m) = f_n(m)$. Hier ist g surjektiv und folglich $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \precsim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Nun ist zum Beispiel $A_1 \precsim \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Da A_1 und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ sind, folgt $\mathbb{N} \precsim \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \precsim \mathbb{N}$, und nach dem Satz von Cantor-Schröder-Bernstein ist $\mathbb{N}$ gleichmächtig zu $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
(siehe Skript S. 123 & 124) [4]

(ii) Sei $k = 2$. Dann gibt es Bijektionen f_1, f_2 mit $M_1 = \{f_1(n) : n \in \mathbb{N}\}$ und $M_2 = \{f_2(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Wir setzen nun $H_k = \{(f_1(n), f_2(k)) : n \in \mathbb{N}\}$ und bemerken, dass H_k abzählbar ist. Es gilt $M_1 \times M_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$ und nach (i) ist $M_1 \times M_2$ abzählbar.

Sei nun $M_1 \times \_ \times M_k$ abzählbar für ein $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten nun $M_1 \times \_ \times M_k \times M_{k+1}$ und bemerken, dass Bijektionen g_1, g_2 mit $M_1 \times \_ \times M_k = \{g_1(n) : n \in \mathbb{N}\}$ und $M_{k+1} = \{g_2(n) : n \in \mathbb{N}\}$ gibt.

Wir setzen nun $\tilde{H}_l = \{(g_1(n), g_2(l)) : n \in \mathbb{N}\}$ und bemerken, dass $\tilde{H}_l$ abzählbar ist. Es gilt $M_1 \times \_ \times M_{k+1} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \tilde{H}_l$ und nach (i) ist $M_1 \times \_ \times M_{k+1}$ abzählbar.

[5]

(iii) Wir definieren

$$A_n = \{ A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} : A \text{ hat höchstens } n \text{ Elemente} \},$$

wobei $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ ist. Dann ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ die Menge aller nichtleeren, endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und wir zeigen, dass A_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ abzählbar ist.

Für $n=1$ ist $A_1 = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$ und A_1 ist abzählbar.

Sei A_k abzählbar für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein Bijektion f mit $A_k = \{ f(m) : m \in \mathbb{N}\}$ und es gilt $A_{k+1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ f(m) \cup \{n\} : m \in \mathbb{N}\}$.

Damit ist A_{k+1} als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen selbst abzählbar. [5]

3\. (i) Es gilt $z + iw = i \iff z = i(1-w)$ und wir erhalten

$$1 = iz - 3w = i[i(1-w)] - 3w = -1 - 2w \Rightarrow w = 2.$$

Damit löst $z = -i$ und $w = 2$ die Gleichungen. [3]

(ii) Die Lösungen der Gleichung sind

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4i}}{2} \\ &= \frac{-(1+i) \pm \sqrt{1 + 2i + i^2 - 4i}}{2} \\ &= \frac{-(1+i) \pm \sqrt{1 - 2i + i^2}}{2} \\ &= \frac{-(1+i) \pm \sqrt{(1-i)^2}}{2} \\ &= \frac{-(1+i) \pm (1-i)}{2} \Rightarrow z_1 = -i, \; z_2 = -1. \end{aligned}$$

[3]

(iii) Wir schreiben $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ und erhalten die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 + \bar{z}^2 + z - \bar{z} - 6 - 2i \\ &= (x+iy)^2 + (x-iy)^2 + (x+iy) - (x-iy) - 6 - 2i \\ &= x^2 - y^2 + 2ixy + x^2 - y^2 - 2ixy + 2iy - 6 - 2i \end{aligned}$$

$$= 2(x^2-y^2+iy-3-i)$$
$$= 2(x^2-y^2-3+i(y-1)).$$

Damit gelten für x, y die Gleichungen

$$x^2-y^2-3=0, \quad y=1$$

und wir erhalten die Lösungen

$$z_1 = 2+i, \quad z_2 = -2+i.$$ [3]

4. (i) Für $x \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $x^{1/n}$ die eindeutige positive Lösung y von $y^n = x$. Damit gibt es kein $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}_+$ mit $x_1^{1/n} = x_2^{1/n}$ sowie $x_1^r = x_2^r$ für $r \in \mathbb{Q}$. Sei $x_1 < x_2$. Dann sind $x_1^{1/n}, x_2^{1/n}$ die eindeutigen positiven Lösungen y_1, y_2 von $y_1^n = x_1$, $y_2^n = x_2$.
Sei $y_1 \geq y_2$. Dann gilt $y_1^n \geq y_2^n$ und somit $x_1 \geq x_2$. Dies ist ein Widerspruch zu $x_1 < x_2$ und folglich ist $y_1 < y_2$, also $x_1^{1/n} < x_2^{1/n}$.
Seien $r = m/n \in \mathbb{Q}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $x_1 < x_2$. Dann ist $x_1^{1/n} < x_2^{1/n}$ sowie $x_1^{m/n} < x_2^{m/n}$. Damit ist $x \mapsto x^r$ für $x \in \mathbb{R}_+$ und $r \in \mathbb{Q}, r > 0$ streng monoton wachsend.
Seien $r = -m/n \in \mathbb{Q}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $x_1 > x_2$. Dann ist $x_1^{-1} < x_2^{-1}$ sowie $(x_1^{-1})^{m/n} < (x_2^{-1})^{m/n}$ und schließlich $x_1^{-m/n} < x_2^{-m/n}$. Damit ist $x \mapsto x^r$ für $x \in \mathbb{R}_+$ und $r \in \mathbb{Q}, r < 0$ streng monoton fallend.

[4]

(ii) Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = b_n - a_n$. Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist als Summe konvergenter Folgen selbst konvergent und $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei $\lim_{n \to \infty} c_n = -\varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|c_n - (-\varepsilon)| = |c_n + \varepsilon| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Es gilt $c_n + \varepsilon = |c_n + \varepsilon| < \varepsilon$ und somit $c_n < 0$ für alle $n \geq N$ und dies ist ein Widerspruch zu $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Folglich gilt $\lim_{n \to \infty} c_n \geq 0$ sowie $\lim_{n \to \infty} b_n \geq \lim_{n \to \infty} a_n$.

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$ für $n\in\mathbb{N}$. Dann ist $b_n > a_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ [4]

(iii) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch M beschränkt. Dann gilt

$$-Ma_n \leq a_n b_n \leq Ma_n$$

für alle $n\in\mathbb{N}$. Da $\lim_{n\to\infty} -Ma_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} Ma_n = 0$ ist, folgt nach dem Einschließungssatz $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. [3]