1. (i) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^3+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{1+\frac{4}{n^3}} = \frac{0+0}{1+0} = 0,$$

da $\lim_{n\to\infty} 1/n^s = 0$ für $s\in\mathbb{Q}$ mit $s>0$. Nun ist

$$-\frac{n+3}{n^3+4} \le (-1)^n \frac{n+3}{n^3+4} \le \frac{n+3}{n^3+4}$$

und nach dem Einschließungssatz

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n^3+4} = 0.$$

[2]

(ii) Es gilt

$$\sqrt{9n^2+2n+1} - 3n = \frac{9n^2+2n+1-9n^2}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n}$$

$$= \frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n}$$

$$= \frac{2+1/n}{\sqrt{9+2/n+1/n^2}+3}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n = \frac{1}{3}.$$

(Es gilt $3 \le \sqrt{9+2/n+1/n^2} \le 3+2/n+1/n^2$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{9+2/n+1/n^2} = 3.)$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a>0$ (siehe Skript S. 153/154)

sowie

$$\sqrt[n]{n^2} \le \sqrt[n]{n^2+n} \le \sqrt[n]{2n^2}$$

für alle $n\in\mathbb{N}$. Mit der Rechnung

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n} = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1$ ist. Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n}\left(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n\right) = 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

[4]

(iii) Sei $a \geq b$, sodass $\max\{a,b\} = a$ ist. Es gilt

$$a^n \leq a^n + b^n \leq 2a^n,$$

sodass

$$a \leq \sqrt[n]{a^n+b^n} \leq \sqrt[n]{2}\, a$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Hier ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\} = a$. Analog erhalten wir für $b > a$, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\} = b$ gilt und somit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\}$ (siehe Skript S.163). [2]

2. (i) Es gilt $x_1 = 1 \in [1,3]$. Sei $x_n \in [1,3]$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$1 < 1 + \frac{2}{3} \leq x_{n+1} \leq 1 + \frac{2}{1} = 3$$

und somit $x_{n+1} \in [1,3]$. [2]

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 1 + \frac{2}{x_{n+1}} \\ &= 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x_n}} \\ &= 1 + \frac{2x_n}{x_n + 2} \\ &= \frac{3x_n + 2}{x_n + 2} \\ &= \frac{3(x_n+2) - 6 + 2}{x_n + 2} \\ &= 3 - \frac{4}{x_n + 2}. \end{aligned}$$

[1]

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} & x_{n+2} \geq x_n & \qquad & x_{n+2} \leq x_n \\ \Rightarrow\ & \frac{2}{x_{n+2}} \leq \frac{2}{x_n} & \qquad \Rightarrow\ & \frac{2}{x_{n+2}} \geq \frac{2}{x_n} \\ \Rightarrow\ & 1 + \frac{2}{x_{n+2}} \leq 1 + \frac{2}{x_n} & \qquad \Rightarrow\ & 1 + \frac{2}{x_{n+2}} \geq 1 + \frac{2}{x_n} \\ \Rightarrow\ & x_{n+3} \leq x_{n+1} & \qquad \Rightarrow\ & x_{n+3} \geq x_{n+1} \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$. [2]

Wir betrachten die Teilfolge $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ und zeigen, dass $x_{2n-1} \leq x_{2n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt. Es gilt $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1 + \frac{2}{3}$ und somit $x_1 \leq x_3$.
Sei nun $x_{2n-1} \leq x_{2n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $x_{2n} \geq x_{2n+2}$ sowie $x_{2n+1} \leq x_{2n+3}$ nach (iii) und damit erhalten wir induktiv, dass $x_{2n-1} \leq x_{2n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt und somit $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge ist. Analog erhalten wir, dass $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge ist.
Da $x_n \in [1,3]$ nach (i) ist, sind die Folgen nach oben und nach unten beschränkt. Folglich konvergieren beide Teilfolgen. Der Grenzwerte lösen nach (ii) beide die Gleichung

$$x = 3 - 4/_{x+2}$$

und ist $x=2$. Die Lösung $x=-1$ liegt nicht in $[1,3]$.
Die Teilfolgen $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen $x=2$ und somit auch die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. [3]

3. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Grenzwert a. Dann gibt es zu jedem ε ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon/_2$$

für alle $n \geq N_1$. Nun ist $\sum_{k=1}^{N_1}(a_k - a)$ konstant und es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}(a_k - a) = 0$, sodass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} a_k\right| < \varepsilon/_2$$

für alle $n \geq N_2$.
Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $N \geq \max\{N_1, N_2\}$, dass

$$\begin{aligned} |M_n - a| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)\right| \\ &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}(a_k - a)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}(a_k - a)\right| \\ &< \varepsilon/_2 + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}|a_k - a| \\ &< \varepsilon/_2 + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}\varepsilon/_2 \\ &= \varepsilon/_2\left(1 + 1 - \frac{N_1}{n}\right) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n \geq N$. Damit gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N mit
$$|M_n - a| < \varepsilon$$
für $n \geq N$, sodass $\lim_{n\to\infty} M_n = a$ ist.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge
$$M_n = \begin{cases} 1/n, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$
und $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$. Die Folge (a_n) konvergiert nicht. [6]

4. Sei $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a$. Wir definieren die Folgen $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch
$$m_n = \inf\{a_k : k \geq n\}, \qquad s_n = \sup\{a_k : k \geq n\}.$$
Es gilt
$$m_n = \inf\{a_k : k \geq n\} \leq \inf\{a_k : k \geq n+1\} = m_{n+1},$$
$$s_n = \sup\{a_k : k \geq n\} \geq \sup\{a_k : k \geq n+1\} = s_{n+1}$$
sodass $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Da beide Folgen beschränkt sind, sind sie konvergent. Seien m, s die jeweiligen Grenzwerte.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nun ein N_m, N_M mit
$$|m_n - m| = m - m_n < \varepsilon, \qquad n \geq N_m,$$
$$|s_n - s| = s_n - s < \varepsilon, \qquad n \geq N_M.$$
Damit ist
$$a_i \geq \inf\{a_k : k \geq N_m\} > m - \varepsilon, \qquad i \geq N_m,$$
$$a_j \leq \sup\{a_k : k \geq N_M\} < s + \varepsilon, \qquad j \geq N_M.$$
Nun sind $\liminf_{n\to\infty} a_n = m^*$, $\limsup_{n\to\infty} a_n = s^*$ Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Damit gibt es zu jedem N_m ein i^* und jedem N_M ein j^* mit $i^* \geq N_m, j^* \geq N_M$ und
$$a_{i^*} < m^* + \varepsilon, \quad a_{j^*} > s^* - \varepsilon$$
sodass $m^* \geq m$, $s^* \leq s$ ist.

Weiterhin gibt es zu jedem N_m ein i^* und jedem N_M ein j^* mit $i^* \geq N_m$, $j^* \geq N_M$ und

$$a_{i^*} > m^* - \varepsilon \,, \quad a_{j^*} < s^* + \varepsilon,$$

sodass

$$m_{i^*} = \inf\{a_k : k \geq i^*\} > m^* - \varepsilon \,, \quad s_{j^*} = \sup\{a_k : k \geq j^*\} < s^* + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist erhalten wir so, dass

$$m = \lim_{n\to\infty} m_n \geq m^* \,, \qquad s = \lim_{n\to\infty} s_n \leq s^*$$

gilt und folglich $m^* = m, s^* = s$.

Da $s = m = a$ gilt, gibt es nun zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_m, N_M mit

$$a_i \geq \inf\{a_k : k \geq N_m\} > a - \varepsilon, \qquad i \geq N_m,$$

$$a_j \leq \sup\{a_k : k \geq N_M\} < a + \varepsilon \,, \qquad j \geq N_M.$$

Folglich gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N (hier $N = \max\{N_m, N_M\}$) mit

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon,$$

sodass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgt.

Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Da a der einzige Häufungspunkt ist, folgt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a.$$

[10]

5. (i) Es gilt

$$\begin{aligned}
(1+\tfrac{1}{n})^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{n-l}{n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{l=1}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{n}\right)
\end{aligned}$$

Es gilt $\left(1 - \frac{l}{n}\right) \leq 1$ für alle $l < n$ und somit

$$a_n = (1+1/n)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{l=1}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} k! = s_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

[2]

(ii) Es gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{n^k} + 1$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \frac{1}{n^{k+1}} + 1$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \prod_{l=0}^{k} \left(\frac{n+1-l}{n}\right) + 1$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{n+1-k}{n}\right)^{k+1} + 1 \qquad (n+1-l \geq n+1-k \text{ für } l \leq k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^{k+1} + 1$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \left(1 - \frac{(k+1)(k-1)}{n}\right) + 1 \quad \text{(Bernoulli)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)(k-1)}{(k+1)!\,n} + 1$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\right) - 1 + 0\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n!} - 1\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!\,n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!\,n}$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

und somit

$$s_n \leq b_n.$$

[4]

(ii) Da $\lim_{n\to\infty} a_n = e$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \left(1+\frac{1}{n}\right) = e$ gilt, folgt nach dem Einschließungssatz

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$ [2]