1. (i) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge. Dann gilt

$$\sum_{k=2^n}^{2^n-1} a_k \leq \sum_{k=2^n}^{2^n-1} a_{2^n} = 2^n a_{2^n}$$

für alle $n\in\mathbb{N}_0$ und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}. \qquad (*)$$

Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \sum_{n=3}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

$$\leq a_1 + a_1 + a_2 + a_2 + a_3 + a_3 + \sum_{n=4}^{\infty} 2a_n$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad (**)$$

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent (divergent), so folgt mit der Ungleichung (**) ((*)) mit Satz 7.10, dass $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergent (divergent) ist.
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergent (divergent), so folgt mit der Ungleichung (*)((**)) mit Satz 7.10, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent (divergent) ist.
[6]

(ii) Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = n^{-q}$ für $q>1$. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k b_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-q)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{q-1}}\right)^k$$

konvergiert, da $q>1$ ist, und nach dem Kondensations-kriterium somit auch $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. [3]

2. Es gilt

$$|a_n| \leq (1 - c/n)|a_{n-1}|$$

$$\Rightarrow n|a_n| \leq (n-c)|a_{n-1}|$$

$$\Rightarrow (c-1)|a_{n-1}| \leq (n-1)|a_{n-1}| - n|a_n|$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und es gibt ein M so, dass die Ungleichung für alle $n \geq M$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=M}^{N} |a_{k-1}| &\leq \frac{1}{c-1} \sum_{k=M}^{N} \left((k-1)|a_{k-1}| - k|a_k|\right) \\ &= \frac{1}{c-1}\left(\sum_{k=M}^{N}(k-1)|a_{k-1}| - \sum_{k=M+1}^{N+1}(k-1)|a_{k-1}|\right) \\ &= \frac{1}{c-1}\left((M-1)|a_{M-1}| - N|a_N|\right) \\ &\leq \frac{1}{c-1}(M-1)|a_{M-1}|.\end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(c_N)_{N \geq M}$ mit $c_N = \sum_{k=M}^{N} |a_{k-1}|$ beschränkt und nach Satz 7.2 ist $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent.

[9]

3. (i) Es gilt

$$\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n+1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{2}{n} + \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} - 1 - \frac{2}{N+1} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)}\end{aligned}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} &= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \lim_{N \to \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)}\right) \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

[4]

(ii) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist alternierend und $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Satz von Leibniz (Satz 7.3) konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Das Cauchy Produkt $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)^2$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Nun ist $(\sqrt{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine streng monoton wachsende Folge und es gilt

$$\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1} \leq \sqrt{n+1}\sqrt{n+1} = n+1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$. Damit ist

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} = |c_n|$$

und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge, sodass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent ist.

[4]

4. (i) Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} = \frac{1}{e} \neq 0$$

und somit ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+1/k)^k}$ divergent. [2]

(ii) Es gilt

$$\frac{k+1}{\sqrt{k^4+k}} \geq \frac{k+1}{\sqrt{k^4+3k^4}} = \frac{k+1}{2k^2} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k^2} \geq \frac{1}{2k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{\sqrt{k^4+k}}$ divergiert nach dem Vergleich mit der Minorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$.

[2]

(iii) Es gilt

$$\frac{\frac{k+1+1}{3^{k+1}}}{\frac{k+1}{3^k}} = \left(1+\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{3}$$

und somit $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{3}$. Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium.

[2]

(iv) Es gilt

$$\frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \frac{k^k}{(k+1)^k} = \frac{1}{(1+1/k)^k}$$

und somit $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{e}$, sodass die Reihe konvergiert.

[2]

5. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z|$$

für alle drei Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, sodass die Reihen konvergieren für z mit $|z|<1$ und divergieren für z mit $|z|>1$.

[1]

(i) Die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n$ divergieren.

[1]

(ii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

[2]

(iii) Die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergieren absolut.

[2]