1. (i) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{4n}{2n}}{\binom{4(n+1)}{2(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n)!\,(2n+2)!\,(4n+4-(2n+2))!}{(2n)!\,(4n-2n)!\,(4n+4)!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n)!\,(2n+2)!\,(2n+2)!}{(2n)!\,(2n)!\,(4n)!\,(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)^2(2n+1)^2}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(4n+3)(4n+1)}$$

$$=\frac{1}{16}$$

und der Konvergenzradius der ersten Reihe ist $1/16$. [2]

(ii) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\frac{1}{n+1}}{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}\right)$$

$$=1 \qquad \left(\text{da } 1\le\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)$$

und der Konvergenzradius der zweiten Reihe ist 1. [2]

(iii) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-3n^4}{4(n+1)^3-3(n+1)^4}=1$$

und der Konvergenzradius der dritten Reihe ist 1. [2]

2. (i) Es gilt

$$|f(z)-f(w)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z^n - w^n)\right|$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, (z-w) \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k}\right|$$

$$\leq |z-w| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |z^k w^{n-1-k}|$$

$$\leq |z-w| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}$$

für alle $z, w \in D_r(0)$, $r<R$. Da $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| n r^{n-1}} = \frac{r}{R} < 1$ für $r<R$ ist, gibt es ein $L_r < \infty$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} = L_r$ für jedes $r<R$. Damit erfüllt f auf $D_r(0)$ eine Lipschitzbedingung mit der Konstanten L_r.

[4]

Sei g Lipschitz-stetig. Dann gibt es ein $L^* > 0$ mit $|g(x)-g(y)| \leq L^*|x-y|$ für alle $x, y \in [0,1]$. Wähle $L \geq L^*, 1$ und $x = 0$, $y = \frac{1}{4L^2}$. Dann ist

$$|g(x)-g(y)| = \frac{1}{2L} > \frac{1}{4L} = \frac{L}{4L^2} = L|x-y| \geq L^*|x-y|$$

und dies ist ein Widerspruch dazu, dass g Lipschitz-stetig sei.

[2]

(ii) Die Funktion $h: [-2,2] \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = x + x^{100} - 1$ ist Lipschitz-stetig (stetig), da (zum Beispiel)

$$|h(x)-h(y)| = |x-y| + |x^{100} - y^{100}|$$

$$\leq |x-y| + |x-y| \sum_{k=0}^{99} |x^k y^{99-k}|$$

$$\leq (100 \cdot 2^{99} + 1)|x-y|,$$

und es gilt $h(-1) = -1$, $h(1) = 1$. Nach Satz 8.1. (Zwischenwerteigenschaft) gibt es ein $c \in (-1,1)$ mit $h(c) = 0$.

[2]

3. Wir betrachten die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n+1}=f(x_n)$ und $x_1\in\mathbb{R}$ beliebig. Hier gilt

$$
\begin{aligned}
|x_{n+1}-x_n| &= |f(x_n)-f(x_{n-1})| \\
&\leq L|x_n-x_{n-1}| \\
&\leq L^2|x_{n-1}-x_{n-2}| \\
&\leq L^{n-1}|x_2-x_1|
\end{aligned}
$$

für alle $n\in\mathbb{N}$, wobei $L<1$ die Lipschitz-Konstante von f ist.

[2]

Sei $m>n$. Dann erhalten wir

$$
\begin{aligned}
|x_m-x_n| &= \left|\sum_{k=0}^{m-n-1}(x_{n+k+1}-x_{n+k})\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-n-1}|x_{n+k+1}-x_{n+k}| \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-n-1} L^{n+k-1}|x_2-x_1| \\
&= L^{n-1}\sum_{k=0}^{m-n-1} L^k\,|x_2-x_1| \\
&= L^{n-1}\frac{1-L^{m-n}}{1-L}|x_2-x_1| \\
&\leq \frac{L^{n-1}}{1-L}|x_2-x_1|.
\end{aligned}
$$

[3]

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L^{n-1}}{1-L}=0$$

und damit erhalten wir zu jedem $\varepsilon/|x_2-x_1|$ ein $N\in\mathbb{N}$ mit

$$\frac{L^{n-1}}{1-L}<\frac{\varepsilon}{|x_2-x_1|}$$

für alle $n\geq N$.

Insgesamt erhalten wir somit zu jedem ε ein $N\in\mathbb{N}$ mit

$$|x_m-x_n|<\varepsilon$$

für alle $m>n\geq N$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy Folge.

[3]

Folglich ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen. Sei

$x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Es gilt

$$|f(x) - f(x_n)| \leq L|x - x_n|$$

und so folgt $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Da

$$0 \leq |f(x) - x| \leq |f(x) - x_n| + |x - x_n|$$

und $\lim_{n\to\infty}\left(|f(x) - f(x_n)| + |x - x_n|\right) = 0$ ist, erhalten wir $f(x) = x$. [2]

Seien nun x^*, x mit $x^* \neq x$ Fixpunkte von f. Dann ist

$$|x^* - x| = |f(x^*) - f(x)| \leq L|x^* - x|$$

sowie $(1-L)|x^* - x| \leq 0$ und dies ist ein Widerspruch. [2]

4. Es gilt $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$. Sei $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $x \leq n$. Wähle $m \in \mathbb{N}$ so, dass $mx \leq n < (m+1)x$. Hier gilt

$$1 + \frac{1}{m+1} < 1 + \frac{x}{n} \leq 1 + \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{mx} < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{(m+1)x}. \qquad \text{(Satz 8.3)}$$

Mit Satz 8.3 erhalten wir

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{(m+1)x} = \lim_{m\to\infty}\left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^x \left(1 + \frac{1}{m}\right)^x = e^x,$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{mx} = \lim_{m\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{(m+1)x}}{\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^x} = e^x.$$

Damit ist $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ für $x > 0$.

Sei $x < 0$. Dann ist $-x > 0$ und wir erhalten analog

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-x}{n}\right)^n = e^{-x}. \qquad [5]$$

Sei $n > |x|$. Dann ist

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}, \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq 1,$$

sodass
$$\left(1-\frac{x^2}{n}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n} \leq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}$$

und $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ für alle $x\neq 0$ gilt. Es gilt $e^0=1$ und damit $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

[3]

5. (i) Mit $\gamma = x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$ ist
$$2^\gamma = e^{\gamma\ln 2} = e^{x\ln 2}e^{iy\ln 2}.$$

Es gilt
$$e^{iy\ln 2} = \operatorname{cis}(y\ln 2) = \cos(y\ln 2) + i\sin(y\ln 2)$$
und 2^γ ist reell für $x\in\mathbb{R}$ und $y=\frac{\pi n}{\ln 2}$, $n\in\mathbb{Z}$ sowie rein imaginär für $x\in\mathbb{R}$ und $y=\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)/\ln 2$, $n\in\mathbb{Z}$.

[3]

(ii) Es ist $(1+i) = \sqrt{2}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\operatorname{cis}(\pi/4)$ und mit
$$\sqrt{2}^8 = 2^4 = 16,\quad \operatorname{cis}(\pi/4)^8 = \operatorname{cis}(8\cdot\pi/4) = \operatorname{cis}(2\pi) = 1$$
erhalten wir $(1+i)^8 = 16$.

[3]