1. (i) Es gilt $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und somit

$$\frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{2} \frac{z^n}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh(z),$$

$$\frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n)}{2} \frac{z^n}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z).$$

[2]

(ii) Mit (i) erhalten wir

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \left(\frac{\exp z + \exp(-z)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\exp z - \exp(-z)}{2}\right)^2 = 1,$$

da $\exp z \exp(-z) = 1$. [1]

(iii) Es gilt

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und somit

$$\cosh iz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z,$$

$$-i \sinh iz = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \sin z.$$

[2]

2. (i) Seien $\varepsilon > 0$, $y \in \mathbb{R}$ und $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{1+|2y|}\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x^2 - y^2| &\leq |x-y||x+y| \\ &\leq |x-y|(|x-y| + 2|y|) \\ &\leq |x-y|(1+2|y|) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta$. [2]

(ii) Sei $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ mit $\cos y \neq 0$. Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ nach Satz 3.8. ein $x \in \mathbb{Q} \cap (y, y+\delta)$ und für dieses gilt $|g(x) - g(y)| = |\cos y| > 0$. Für $\varepsilon < |\cos y|$ gibt es somit kein δ mit $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ für alle x mit $0 < |x-y| < \delta$.
Sei $y \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es eine Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ und eine Folge

$(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\infty} q_n = y = \lim_{n\to\infty} r_n$. Da $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und $0\neq \cos y$ ist, ist g nicht folgenstetig bzw. stetig in y.

Sei $y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ mit $\cos y = 0$. Dann ist g Lipschitz-stetig in y, da

$$|g(x)-g(y)| \leq |\cos x - \cos y|$$

ist. Damit ist g stetig in $y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ mit $\cos y$, sonst nicht. [3]

(iii) Da $x\mapsto x$, $x\mapsto \sin x$ stetig sind von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist h als Produkt stetiger Funktionen selbst stetig für $x\neq 0$. Es gilt $|x\sin x| \leq |x|$, sodass h lipschitz-stetig in 0 ist. Damit ist $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig.

[3]

(iv) Sei $y_1\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $y_2\in\mathbb{Q}$. Dann gibt es zu jedem $\delta>0$ ein $x_1\in\mathbb{Q}\cap(y_1,y_1+\delta)$ bzw. ein $x_2\in(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap(y_2,y_2+\delta)$ mit $|n(x_1)-n(y_1)| = |n(x_2)-n(y_2)| = 1$. Damit ist n nirgends stetig. [2]

3. (i) Seien $\varepsilon>0$, $\delta<(\varepsilon/K)^{1/\alpha}$ und $y\in I$. Dann ist $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ für alle $x\in I$ mit $|x-y|<\delta$.
[2]

(ii) Sei $\alpha>0$ mit $\alpha<1$. Dann ist

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y| = L|x-y|^{1-\alpha}|x-y|^{\alpha} \leq L|I|^{1-\alpha}|x-y|^{\alpha}.$$

[2]

(iii) Sei $\beta>0$ mit $\beta<\alpha$. Dann ist

$$|f(x)-f(y)| \leq K|x-y|^{\alpha} = K|x-y|^{\alpha-\beta}|x-y|^{\beta} \leq K|I|^{\alpha-\beta}|x-y|^{\beta}.$$ [2]

(iv) Sei $x,y\in I$ mit $x<y$ und wir teilen das Intervall $[x,y]$ in n gleich lange Teilintervalle $[x_{i-1},x_i]$ mit $x_0=x$, $x_n=y$. Hier gilt

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= |\Sigma\, f(x_{i-1})-f(x_i)|\\ &\leq \sum_{i=1}^{n} K|x_{i-1}-x_i|^{\alpha}\\ &= nK\left|\frac{x-y}{n}\right|^{\alpha}\\ &= K\frac{|x-y|^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}\end{aligned}$$

für jedes $n\in\mathbb{N}$ und für $n\to\infty$ erhalten wir so, dass $f(x)=f(y)$ gilt. Dies gilt für alle $x,y\in I$, sodass f konstant ist. [3]

4. (i) Sei $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit $g(x)=f(x)-x$. Dann ist g stetig und es gilt $g(a)\geq 0$, $g(b)\leq 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x_0\in[a,b]$ mit $g(x_0)=0$, d.h. $f(x_0)=x_0$. [2]

(ii) Sei $a\neq b$. Dann ist $f(a)\neq f(b)$, da f injektiv ist, und somit entweder $f(a)<f(b)$ oder $f(a)>f(b)$. Sei $f(a)<f(b)$. Wir zeigen, dass $f(a)<f(x)<f(b)$ für alle $x\in(a,b)$ gilt.

Sei $f(x)\leq f(a)$. Dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $y\in[x,b]$ mit $f(y)=f(a)$ und wir erhalten somit einen Widerspruch zur Injektivität von f.

Sei $f(x)\geq f(b)$. Dann gibt es ein $y\in[a,x]$ mit $f(y)=f(b)$ und wir erhalten somit einen Widerspruch zur Injektivität von f.

Nun zeigen wir, dass $f(x)<f(y)$ für alle $x,y\in[a,b]$ mit $x<y$ gilt.

Für $y=b$ ist $f(x)<f(y)=f(b)$, da $f(a)<f(x)<f(b)$ für alle $x\in(a,b)$ ist.

Sei $y<b$. Es gilt $f(x)<f(b)$ und $f:[x,b]$ ist injektiv. Damit erhalten wir $f(x)<f(y)<f(b)$ für alle $y\in(x,b)$.

Falls $f(b)<f(a)$ ist, folgt die Aussage analog bei Betrachtung der Funktion $\hat{f}=-f$. [4]

(iii) Es gilt $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ und somit $f(0)=0$. Sei $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

Dann folgt induktiv $f\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$ mit $(x_i)_{i=1}^{n}\subset\mathbb{R}$.

Damit erhalten wir, dass $f(m)=\sum_{i=1}^{m}f(1)=m\,f(1)$ für alle $m\in\mathbb{N}$ gilt.

Wir setzen $\lambda=f(1)\in\mathbb{R}$. Mit der Rechnung

$$0=f(0)=f(m-m)=f(m)+f(-m)$$

$$\iff f(-m)=-f(m)=-m\lambda$$

für $m\in\mathbb{N}$ erhalten wir $f(z)=\lambda z$ für alle $z\in\mathbb{Z}$.

Damit erhalten wir

$$\lambda z=f(z)=f\left(n\frac{z}{n}\right)=n\,f\left(\frac{z}{n}\right)\iff\lambda\frac{z}{n}=f\left(\frac{z}{n}\right)$$

für $z\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, sodass $\lambda q=f(q)$ für alle $q\in\mathbb{Q}$ gilt.

Sei nun $r \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = r$ und mit der Stetigkeit von f erhalten wir

$$f(r) = f(\lim_{n\to\infty} q_n) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} q_n = \lambda r. \qquad [4]$$

5. (i) Sei K kompakt und nicht beschränkt. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ mit $|x_n| \geq n$ und für jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\lim\limits_{k\to\infty} |x_{n_k}| = \infty$, sodass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge hat.

[2]

(ii) Seien $K_1, \ldots, K_m$ kompakte Mengen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\bigcup\limits_{i=1}^m K_i$. Dann gibt es mindestens ein K_j, dass unendlich viele Glieder der Folge beinhaltet. Wir betrachten nun die Teilfolge $(x_{n_j}) \subset K_j$ von (x_n) und erhalten mit der Kompaktheit von K_j eine konvergente Teilfolge von (x_{n_j}). Damit hat jede Folge in $\bigcup\limits_{i=1}^m K_i$ eine konvergente Teilfolge.

Seien $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ kompakte Mengen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\bigcap\limits_{i=1}^\infty K_i$. Dann ist (x_n) eine Folge in K_1 und mit der Kompaktheit von K_1 erhalten wir ein konvergente Teilfolge (x_n') mit Grenzwert x in K_1. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\bigcap\limits_{i=1}^\infty K_i$ ist, ist die konvergente Teilfolge (x_n') auch ein Folge in $\bigcap\limits_{i=1}^\infty K_i$. Damit ist (x_n') eine Folge in K_i für alle $i \in \mathbb{N}$. Mit der Kompaktheit von K_i erhalten wir eine konvergente Teilfolge in K_i mit Grenzwert in K_i für alle $i \in \mathbb{N}$.
Da diese konvergente Teilfolgen der konvergenten Folge (x_n') sind, besitzen sie den Grenzwert x, sodass $x \in K_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ist. Damit ist $x \in \bigcap\limits_{i=1}^\infty K_i$ und $\bigcap\limits_{i=1}^\infty K_i$ folglich kompakt.

[4]