1. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei U eine Umgebung von a und $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(a) \subset U$ ist. Hier gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$ und somit liegen unendlich viele Elemente von D in U.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Jede Umgebung U von a beinhaltet unendlich viele Elemente von D. Damit gibt es zu jedem U ein $z \in D$ mit $z \neq a$ und $z \in U$.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $z_n \in B'_{1/n}(a) \cap D$ und die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.

[6]

2. (i) Wir bemerken zunächst, dass sich jedes Intervall I als höchstens abzählbare Vereinigung von kompakten Intervallen I_n schreiben.
Für $I = [a,b)$ gibt es ein N mit $b - a > 1/N$ und es gilt $[a,b) = \bigcup_{n=N+1}^{\infty} [a, b - \frac{1}{n}]$.
Analog erhalten wir die Ergebnisse für Intervalle der Form $(a,b]$, (a,b) und ähnlich für Intervalle der Form $[a,\infty)$, (a,∞), $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$.
Wir zeigen die Aussage nun für kompakte Intervalle $I = [a,b]$. Sei f monoton wachsend, so ist

$$\{x \in [a,b] : x \text{ ist Sprungstelle}\} = \{x \in (a,b) : f(x+) > f(x-)\}$$
$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{\{x \in (a,b) : f(x+) - f(x-) \geq 1/m\}}_{=Q_m}.$$

Seien x_i, $i \leq s$, die Elemente in Q_m mit $x_i < x_{i+1}$. Wir wählen y_i, $i \leq s$, mit $y_0 = a$, $y_s = b$ und $y_i \in (x_i, x_{i+1})$ für $i \in \mathbb{N}$ und $i \leq s-1$. Es gilt $f(y_{i-1}) \leq f(x_i^-)$ und $f(x_i^+) \leq f(y_i)$ für $i \leq s$. Damit erhalten wir

$$\frac{s}{m} \leq \sum_{i=1}^{s} \left(f(x_i^+) - f(x_i^-)\right) \leq \sum_{i=1}^{s} \left(f(y_i) - f(y_{i-1})\right) = f(b) - f(a)$$

und folglich

$$s \leq m\,(f(b) - f(a)) < \infty.$$

Die Menge Q_m ist somit endlich und die Vereinigung $\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$ somit abzählbar.

[6]

(ii) a) Sei $x \in \overline{D}$. Wähle eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $x_n \to x$. Wir zeigen, dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge ist und somit $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existiert.
Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in D$ mit $|x-y| < \delta$ ist.
Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy folge ist, gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_m| < \delta$ für alle $n, m > N$.
Damit erhalten wir, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ für alle $n, m > N$ gibt und $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge ist. Sei $f(x)$ der Grenzwert des Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
Wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $x_n \to x$ ist.
Seien dazu $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge mit $x_n' \to x$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x_n) - f(x_n')| < \varepsilon/2$ für alle $x_n, x_n' \in D$ mit $|x_n - x_n'| < \delta$.
Es gibt je ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon/2$ für alle $n > N$, $|x_n - x| < \delta/2$ für alle $n > N$ sowie $|x_n' - x| < \delta/2$ für alle $n > N$. Damit erhalten wir ein N mit

$$|f(x_n') - f(x)| \leq |f(x_n') - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $n > N$.

[2]

Sei $\overline{f} : D \to \mathbb{C}$ mit

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D, \\ \lim_{z\to x} f(z), & x \in \overline{D} - D. \end{cases}$$

Wir zeigen, dass die Funktion gleichmäßig stetig ist. Für $x \in D$ folgt dies durch die Eigenschaft von f. Seien $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{D}$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $\delta' > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$ für alle $x, y \in D$ mit $|x-y| < \delta'$.
Es gibt ein $\delta'' > 0$ mit $|f(\overline{x}) - f(x)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in D$ mit $|\overline{x} - x| < \delta''$.
Es gibt ein $\delta''' > 0$ mit $|f(\overline{y}) - f(y)| < \varepsilon/3$ für alle $y \in D$ mit $|\overline{y} - y| < \delta'''$

Seien $\delta/3 = \min(\delta', \delta'', \delta''')$ und $x, y \in D$ mit

$$|f(x) - f(\bar{x})|, |f(y) - f(\bar{y})| < \varepsilon/3$$

sowie

$$|x - \bar{x}|, |y - \bar{y}|, |x - y| < \delta/3.$$

Dann gilt

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq |f(\bar{x}) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(\bar{y}) - f(y)| < \varepsilon$$

für alle $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{D} - D$ mit

$$|\bar{x} - \bar{y}| \leq |\bar{x} - x| + |x - y| + |\bar{y} - y| < \delta.$$

[3]

Seien $\bar{f}_1, \bar{f}_2 : \bar{D} \to \mathbb{C}$ stetige Fortsetzungen von $f : D \to \mathbb{C}$ und $a \in \bar{D} - D$. Dann gibt es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $a_n \to a$. Die Stetigkeit von $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ liefert

$$\bar{f}_1(a) = \lim_{n \to \infty} \bar{f}_1(a_n) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} \bar{f}_2(a_n) = \bar{f}_2(a).$$

Damit ist die Fortsetzung eindeutig.

[2]

b) Ist D beschränkt, so ist auch $\bar{D}$ beschränkt und folglich kompakt. Da $\bar{f} : \bar{D} \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist nach Satz 9.8 die Menge $\bar{f}(\bar{D})$ kompakt. Nach Satz 9.16 ist damit $\bar{f}(\bar{D})$ und, da $f(D) \subset \bar{f}(\bar{D})$ ist, auch $f(D)$ beschränkt.

[2]

(iii) Sei f nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass es zu jedem $\delta > 0$ $z, w \in D$ gibt mit $|z - w| < \delta$ und $|f(z) - f(w)| \geq \varepsilon$. Insbesondere zu $\delta_n = 1/n$ gibt es $z_n, w_n \in D$ mit $|z_n - w_n| < 1/n$ und $|f(z_n) - f(w_n)| \geq \varepsilon$. Nun ist D kompakt und es gibt eine Teilfolge $(z_n')_{n \in \mathbb{N}}$ und z_0 mit $z_n' \to z_0$. Da $|z_n' - w_n'| < 1/n$ ist, konvergiert auch $(w_n')_{n \in \mathbb{N}}$ gegen z_0. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt je ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|f(z_n') - f(z_0)| < \varepsilon/4$ für alle $n > N$ und $|f(w_n') - f(z_0)| < \varepsilon/4$ für alle $n > N$.

Damit gibt es ein N mit

$$|f(w_n') - f(z_n')| \leq |f(z_n') - f(z_0)| + |f(w_n') - f(z_0)| < \varepsilon/2$$

für alle $n > N$ und dies steht im Widerspruch zu

$$|f(w_n') - f(z_n')| \geq \varepsilon.$$

[4]

3. Sei f konvex. Dann gilt

$$f(tu+(1-t)w) \le t\,f(u)+(1-t)f(w)$$

für alle $u,w \in I$, $t\in[0,1]$. Wir schreiben $y = tx+(1-t)z$

erhalten wir

$$\begin{aligned}(f(y)-f(x))(z-x) &\le ((t-1)\,f(x)+(1-t)\,f(z))(z-x)\\ &= (x-((1-t)z+tx))\,f(x)+(tx+(1-t)z-x)\,f(z)\\ &= (f(z)-f(x))(y-x)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x},$$

$$\begin{aligned}(f(z)-f(y))(z-x) &\ge (f(z)-(t\,f(x)+(1-t)f(z)))(z-x)\\ &= -(z-(tx+(1-t)z))\,f(x)+(z-(tx+(1-t)z))\,f(z)\\ &= (f(z)-f(x))(z-y)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

und somit die gesuchte Ungleichung.

[6]

4. (i) Induktionsanfang ist Satz 11.3. Schluss von n auf $n+1$ für $n \ge 1$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(f(x)g(x)) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{n-k}(x)\, g^{k}(x)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{n+1-k}(x)\, g^{k}(x) + f^{n-k}(x)\, g^{k+1}(x)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{n+1-k}(x)\, g^{k}(x) + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} f^{n+1-k}(x)\, g^{k}(x)\\ &= \binom{n}{0} f^{n+1}(x)\, g(x) + \binom{n}{n} f(x)\, g^{n+1}(x)\\ &\quad + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right) f^{n+1-k}(x)\, g^{k}(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{n+1-k}(x)\, g^{k}(x).\end{aligned}$$

[4]

(ii) Es gilt

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{-h}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(f'(x_0)+f'(x_0)\right)$$
$$= f'(x_0).$$

Nein. Betrachte dazu $f(x)=|x|$ im Punkt $x_0=0$. Hier ist $f(h)-f(-h)=0$ für alle $h\in\mathbb{R}$, aber $f'(0)$ existiert nicht. [4]