Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Christian Tietz, M.Sc.

Nachklausur zur Analysis I (WS 2011/2012)

Aufgabe 1 (3+3+4=10 Punkte)

Entscheiden und begründen Sie, ob die nachfolgenden Grenzwerte in $\mathbb{R}$ existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\exp(\cos(x))-1}{x-\frac{\pi}{2}}$. b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\cos(x)}{x+2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} (\sinh(x)+1)^{\frac{1}{x}}$.

Aufgabe 2 (4+4=8 Punkte)

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n(3n^2-1)} \quad ?$$

b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, wobei $b \in \mathbb{R}$. Man beweise, dass $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$.

Aufgabe 3 (3+4+3=10 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass auch $\exp(f)$ konvex ist.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{Q}$. Beweisen Sie, dass f schon konstant ist.

c) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\exp(x) + x = x^2$ mindestens eine Lösung im Intervall $[-1, 1]$ besitzt.

Aufgabe 4 (4+6=10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe der durch $f(x) = x\exp(x)$ definierten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 = 1$.

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der obigen Reihe. Wird f durch diese Reihe dargestellt?

Bitte wenden!

Aufgabe 5 (5+5=10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass
$$\frac{1-\cos(x)}{x} \leq \sin(x)$$
für alle $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ gilt.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b) = 0$. Zeigen Sie, dass zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein $\xi_n \in (a, b)$ existiert mit
$$f'(\xi_n) = nf(\xi_n).$$
(*Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)\exp(-nx)$.)

Aufgabe 6 (3+3+(3+3)=12 Punkte)

a) Sei $\alpha > 0$. Setze $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^\alpha \sin(\frac{1}{x}), & x > 0. \end{cases}$$
Man zeige: f ist eine Regelfunktion auf [0,1]. Gilt dies auch für $\alpha = 0$?

b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ existiert
$$\int_1^\infty x^{s+2} dx \quad ?$$

c) Berechnen Sie die folgenden unbestimmte Integrale ($x > 0$):
i) $\int \exp(\sqrt{x})dx$ ii) $\int \sin(\log(x))dx$.

Zusatzaufgabe (3+7=10 Punkte)

a) Die Funktion $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar und erfülle $\alpha\frac{h'(t)}{t} \leq h''(t)$ für ein $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass $\frac{h'(t)}{t^\alpha}$ monoton wächst.

b) Sei $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $h(0) = 0$ und $h'(2t) \leq kh'(t)$ für ein $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $h(2t) \leq 2kh(t)$ gilt. (*Hinweis:* Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung.)

Ende der Klausur!