§10

Wichtige Klassen reeller Funktionen

Monotone Funktionen sind i.a. unstetig, aber man kann etwas über das Grenzwertverhalten aussagen, wenn man nur "einseitige Grenzwerte" betrachtet.

Definition 10.1 *: Sei $f: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ mit $-\infty \le \alpha < \beta \le \infty$.*

(1) $x_\circ \in (\alpha,\beta)$: (bilde den Grenzwert von $f|_{(\alpha,x_\circ)}$ gemäß Def. 9.4)

$$\left| \begin{array}{lcl} f(x_\circ -) & := & \lim\limits_{x\to x_\circ} \; f|_{(\alpha,x_\circ)} \\ f(x_\circ +) & := & \lim\limits_{x\to x_\circ} \; f|_{(x_\circ,\beta)} \end{array} \right.$$

sofern die Limiten in $\mathbb{R}$ existieren. $f(x_\circ -), f(x_\circ +)$ heißen einseitige Grenzwerte.
andere Schreibweise: $f(x_\circ -) = \lim\limits_{x\uparrow x_\circ} f(x),\ f(x_\circ +) = \lim\limits_{x\downarrow x_\circ} f(x)$

Bemerkungen:

i) $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)$ exist. $\iff$
$\lim\limits_{x\uparrow x_\circ} f(x), \lim\limits_{x\downarrow x_\circ} f(x)$ exist. und sind gleich.

ii) $x_\circ$ Sprungstelle $\iff$ $f(x_\circ \pm)$ existieren und sind $\neq$

(2) $\beta = +\infty$: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert in $\mathbb{R}$: $\iff$
für jede Folge $x_n \in (\alpha,\infty)$ mit $x_n \to \infty$ existiert
$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ in $\mathbb{R}$ und hängt nicht von der Wahl der Folge $\{x_n\}$ ab.

(3) $\alpha = -\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ exist. in $\mathbb{R}$: $\iff \ldots\ldots$

(4) $x_\circ \in [\alpha, \beta]$ (also auch u.U. $\pm\infty$):

<u>uneigentliche Konvergenz bei x gegen $x_\circ$</u>

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_\circ} f(x) = \pm\infty \quad :\iff \\ f(x_n) \to \pm\infty \text{ für jede Folge } x_n \in (\alpha, \beta), x_n \to x_\circ; \\ \text{analoge Def. für } \lim\limits_{x \uparrow x_\circ} f(x), \lim\limits_{x \downarrow x_\circ} f(x) = \pm\infty, \\ \text{wenn } x_\circ \in (\alpha, \beta), \text{ so dass man von beiden Seiten} \\ \text{gegen } x_\circ \text{ laufen kann} \end{cases}$$

Beispiele: $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \downarrow 0} \ln x = -\infty$,

$\lim\limits_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = +\infty, \lim\limits_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

Satz 10.1 : *(Grenzwerte monotoner Funktionen)*

Sei I ein Intervall $\subset \mathbb{R}$ mit Randpunkten $a < b$.
f sei <u>monoton wachsend</u> auf I. Dann existieren an jeder Stelle $y \in I$ die einseitigen Limiten und erfüllen

$$\boxed{\begin{array}{l} f(y-) \;=\; \lim\limits_{x \uparrow y} f(x) \;=\; \sup\{f(x) : x < y\} \;\leq\; f(y) \;\leq \\ \inf\{f(x) : x > y\} \;=\; \lim\limits_{x \downarrow y} f(x) \;=\; f(y+). \end{array}}$$

In den Randpunkten $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existieren die GW'e eigentlich oder uneigentlich:

$$f(a+) = \inf\{f(x) : \quad x > a\},\ f(b-) = \sup\{f(x) : \quad x < b\}.$$

<u>*Falls f monoton fällt, hat man analoge Aussagen.*</u>

Beweis: In den Übungen. $\square$

Als Folgerung daraus erhält man:

Satz 10.2 : *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f := I \to \mathbb{R}$ monoton. Dann hat f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen, und diese sind Sprungstellen.*

Beweis: In den Übungen. □

Nächste Klasse: Differenzen monotoner Funktionen $\longleftrightarrow$ f hat beschränkte Variation.

Definition 10.2 : *BV-Funktionen*

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$. $f : D \to \mathbb{R}$, $D \supset [a,b]$, heißt von endlicher Variation auf $[a,b]$ (oder: von beschränkter Variation), falls $V_a^b(f) < \infty$.

$$V_a^b(f) := \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \;:\; n \in \mathbb{N}, \quad a = t_\circ < t, < \ldots < t_n = b \right\}$$

Variation von f auf $[a,b]$.

(Das Supremum wird gebildet über alle möglichen Zerlegungen von $[a,b]$.)

Bemerkungen:

1) f monoton $\Longrightarrow$ $f \in$ BV $([a,b])$,
2) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz $\Longrightarrow$ $f \in$ BV $([a,b])$
3) Stetige Funktionen müssen nicht BV sein!

Beispiel: $f : [0, \frac{1}{\pi}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ x \cdot \cos\frac{1}{x}, x \neq 0, \end{cases}$ stetig, aber $\notin BV([0, \frac{1}{\pi}])$.

(Siehe Übungen!)

Satz 10.3 : *(Charakterisierung von BV)*

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gehört zu BV $\Longleftrightarrow$

$f = g - h$ mit monoton wachsenden Funktionen $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$

Beweis: In den Übungen.

□

Korollar: Ist $f \in$ BV $([a,b])$, so hat f nur abzählbar viele Umstetigkeitsstellen und diese sind Sprungstellen.

Nächste Klasse: Funktionen mit <u>monotonen</u> Differenzenquotienten
$\longleftrightarrow$ konvexe/konkave Funktionen

Definition 10.3 *: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt <u>konvex</u> $:\Leftrightarrow$*

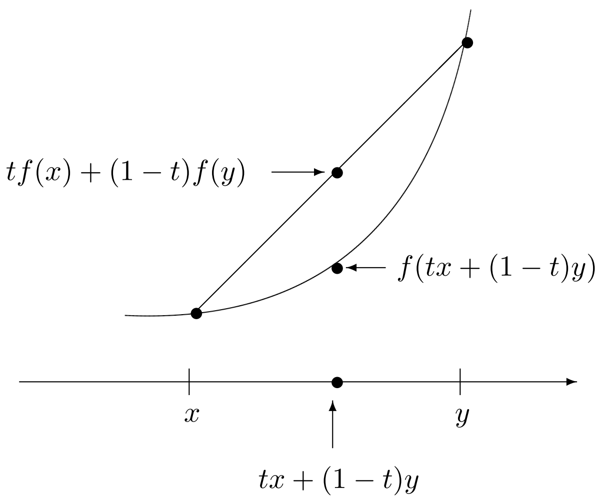
$$f\Big(tx + (1-t)y\Big) \leq t\, f(x) + (1-t)\, f(y)$$

für alle $0 \leq t \leq 1, \quad x, y \in I$

<u>streng konvex:</u> $\ldots\ldots$ *mit* $=$ *nur für* $t \in \{0,1\},\ x = y.$

<u>(streng) konkav:</u> $-f$ *(streng) konvex*

<u>Geom. Interpretation:</u>



konvex = Graph liegt unterhalb der Sekante

Beispiele:

1) $x \mapsto e^x$ streng konvex auf $\mathbb{R}$, ln streng konkav auf $\mathbb{R}^+$

2) $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$ gerade: streng konvex auf $\mathbb{R}$
n ungerade: $x \mapsto x^n$ weder konvex noch konkav auf einem Intervall um 0.

Beweis später mit Kriterien für Konvexität $\rightsquigarrow$ Differentialrechnung □

Konvexe Funktionen lassen sich durch "Monotonie der Differenzenquotienten" beschreiben, d.h. es gilt

Satz 10.4 : *$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (streng) konvex $\Longleftrightarrow$*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \underset{(<)}{\leq} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \underset{(<)}{\leq} \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

für alle $x < y < z$ aus I.

Interpretation: die Sehnensteigung $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ zwischen zwei Punkten $(x, f(x)), (y, f(x))$ $x < y$

im Graphen wächst, wenn man einen oder beide Punkte nach rechts verschiebt.

Beweis: In den Übungen.

□

Als Folgerung daraus erhält man:

Satz 10.5 : *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ konvex (konkav). Dann ist f auf dem Intervall I stetig.*

Bemerkung: Sind $a < b$ die Grenzen von I, so kann man mit Satz 10.4 zeigen, dass f auf jedem Intervall $[\alpha, \beta]$ mit $\alpha > a$ und $\beta < b$ eine Lipschitz Bedingung erfüllt, speziell also zur Klasse BV $([\alpha, \beta])$ gehört.

Beweis: In den Übungen. □