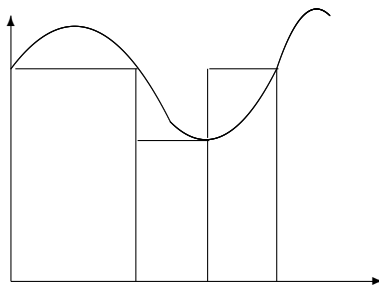


§12

Integralrechnung (für Regelfunktionen)

Motivation: 1) Flächenberechnung



2) systematische Bestimmung von Stammfunktionen
(finde zu f ein F mit $\frac{dF}{dx} = f$)

Idee zur Bildung eines Integralbegriffs:

- $f \equiv c$ auf $[a, b] \implies \int_a^b f(x) dx := c \cdot (b - a)$ “Rechteck”
- f stückweise konstant “Treppenfunktion”
- $f =$ Limes von Treppenfunktionen “Approximation”

Ergebnis: Integral für sog. Regelfunktionen

Nachfolgend: nur reeller Definitionsbereich, Werte in $\mathbb{C}$ möglich.

Definition 12.1 : Sei $a < b$. $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Treppenfunktion

: $\iff$ es gibt eine Zerlegung

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

von $[a, b]$, so dass φ auf (x_{i-1}, x_i) , $i = 1, \dots, n$, konstant ist.

$$\text{Gilt } \varphi = c_i \text{ auf } (x_{i-1}, x_i), \text{ so setzt man: } \int_a^b \varphi(x) dx := \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1})$$

(Treppenfunktionen haben nur endlich viele Werte!)

Bemerkungen:

0) Treppenfunktionen sind offenbar i.a. unstetig. Die Werte $\varphi(x_i)$ an den Teilpunkten spielen für $\int_a^b \varphi dx$ keine Rolle.

1) Def. 12.1 des Integrals hängt nicht von Z ab! D.h.:

Z, Z' Zerlegungen von $[a, b]$,

$$Z = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}, \quad Z' = \{x'_0 < \dots < x'_m\}$$

$$\varphi = c_i \text{ auf } (x_{i-1}, x_i), \quad \varphi = d_k \text{ auf } (x'_{k-1}, x'_k)$$

$$\implies \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{k=1}^m d_k (x'_k - x'_{k-1}).$$

$$\text{Bspl.: } Z = \{a, b\}, \quad Z' = \{a, x', b\}$$

$$\text{offenbar: } c \cdot (b - a) = c \cdot (x' - a) + c \cdot (b - x')$$

2) $\mathcal{T}([a, b]) :=$ Menge aller Treppenfunktionen $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

Übung: $\mathcal{T}([a, b])$ ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

Satz 12.1 : Seien $\varphi, \Psi \in \mathcal{T}([a, b])$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Dann gilt:

$$i) \int_a^b (\alpha\varphi + \beta\Psi) dx = \alpha \cdot \int_a^b \varphi dx + \beta \int_a^b \Psi dx.$$

(Linearität)

$$ii) \left| \int_a^b \varphi dx \right| \leq \int_a^b |\varphi| \cdot dx \leq \|\varphi\| \cdot (b-a)$$

(Beschränktheit) $(\|f\| := \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\})$ lies: "Norm von f "

$$iii) \varphi, \Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(x) \leq \Psi(x) \text{ auf } [a, b] \implies$$

$$\int_a^b \varphi dx \leq \int_a^b \Psi dx. \quad \text{(Monotonie)}$$

Beweis: ii) Sei $Z = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ Zerlegung von $[a, b]$, so dass $\varphi = c_k$ auf (x_{k-1}, x_k) $\implies$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^n |c_k| \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= \int_a^b |\varphi| dx. \end{aligned}$$

Da $|c_k| \leq \|\varphi\|$ ist für $k = 1, \dots, n$, gilt

$$\sum_{k=1}^n |c_k| \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq \|\varphi\| \cdot \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \|\varphi\| \cdot (b-a).$$

i), iii) Sei Z' eine Zerlegung zu Ψ . $Z^* := Z \cup Z' = \{z_0 < \dots < z_N\}$

ist dann Zerlegung sowohl zu φ als auch zu Ψ , also

$$\varphi = c_k \text{ auf } (z_{k-1}, z_k),$$

$$\Psi = d_k \text{ auf } (z_{k-1}, z_k) \text{ für gewisse } c_k, d_k \in \mathbb{C}$$

$$\alpha \cdot \varphi + \beta \Psi \text{ ist dann } = \alpha \cdot c_k + \beta \cdot d_k \text{ auf } (z_{k-1}, z_k) \implies$$

$$\int_a^b (\alpha\varphi + \beta\Psi) dx = \sum_{k=1}^N (\alpha \cdot c_k + \beta \cdot d_k) (z_k - z_{k-1}) =$$

$$\alpha \cdot \sum_{k=1}^N c_k (z_k - z_{k-1}) + \beta \cdot \sum_{k=1}^N d_k (z_k - z_{k-1}) = \alpha \int_a^b \varphi dx + \beta \int_a^b \Psi$$

Im Fall $\varphi \leq \Psi$ gilt $c_k \leq d_k$ auf (z_{k-1}, z_k) , daraus folgt die Ungleichung zwischen den Integralen. $\square$

Für welche Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ kann $\int_a^b f dx$ sinnvoll definiert werden?

Definition 12.2 : Regelfunktionen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit reellem Anfangs- und Endpunkt a bzw. b .

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion auf I , wenn

(i) für $x \in (a, b)$ existieren $f(x+)$ und $f(x-)$

(ii) $a \in I \implies f(a+)$ existiert

$b \in I \implies f(b-)$ existiert

Bem.: 1) $R(I)$ = Menge der Regelfunktionen ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum
2) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall wie oben, so gilt:

stetige Funktionen, BV-Fkten, monotone Fkten $I \rightarrow \mathbb{R}$ sind Regelfunktionen

Wir beschreiben jetzt den Zusammenhang zwischen Regel- und Treppenfunktionen auf kompakten Intervallen $[a, b]$. Dazu benötigen wir eine äquivalente Beschreibung kompakter Mengen.

Satz 12.2 : Für $M \subset \mathbb{R}$ sind gleichwertig:

(i) M sind kompakt (also beschränkt u. abgeschlossen, Satz 9.5)

(ii) Gilt $M \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ mit offenen Intervallen

$U_\lambda = (x_\lambda - \delta_\lambda, x_\lambda + \delta_\lambda)$ bei beliebiger Indexmenge Λ , so gibt es endlich viele $U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}$

mit $M \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\lambda_i}$.

((ii) heißt Überdeckungskompaktheit: aus einer beliebigen offenen Überdeckung kann man eine endliche Teilüberdeckung auswählen.)

Beweis: “ $\implies$ ” $\exists R > 0$ mit $M \subset I_o := [-R, R]$.

Sei $M \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ mit U_λ wie in (ii).

Annahme: $\nexists$ endliche T.Ü.

$\implies M \cap [-R, 0]$ oder $M \cap [0, R]$ nicht durch endlich viele U_λ überdeckbar;

o.E. gelte dies für $M \cap [0, R]$; setze $I_1 := [0, R]$ analog: $M \cap \left[0, \frac{R}{2}\right]$ oder $M \cap \left[\frac{R}{2}, R\right]$ nicht endlich überdeckbar.

rekursiv: Folge $\{I_k\}$ abgeschlossener Intervalle, $I_k \supset I_{k+1}$, $|I_{k+1}| = \frac{1}{2} |I_k|$ und

* $\left| \text{zur Überdeckung von } I_k \cap M \text{ braucht man } \infty \text{ viele } U_\lambda \right|$

aus * folgt: $\# I_k \cap M = \infty$

Sei $s \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \implies s$ ist H.P. von M

M abgeschlossen, also $s \in M$.

Nach Voraussetzung: $M \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \implies \exists \lambda_o : s \in U_{\lambda_o}$.

$$\left(\begin{array}{c} \text{-----} \\ | \quad | \\ x_{\lambda_o} \quad s \end{array} \right)$$

für $k \gg 1$ folgt: $I_k \subset U_{\lambda_o} \implies I_k \cap M \subset U_{\lambda_o}$.

Das widerspricht *.

“ $\Leftarrow$ ” zeige (vgl. Satz 9.5): a) M beschränkt
 b) M abgeschlossen

zu a): $\left\{ \underbrace{\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)}_{=: I_{1/n}(x)} : x \in M, n \in \mathbb{N} \right\}$ ist offene Überdeckung von $M \implies$

bereits endlich viele überdecken $M \implies M$ beschränkt

zu b): Sei M nicht abgeschlossen $\implies \exists$ H.P. a von $M, a \notin M$

sei $U(x) := \left(x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)\right), 0 < \varepsilon(x) := \frac{1}{2} |x - a|, x \in M$

$$\implies M \subset \bigcup_{x \in M} U(x) \implies M \subset \bigcup_{\ell=1}^n U(x_\ell)$$

mit $x_1, \dots, x_\ell \in M$.

Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, $\varepsilon_\ell = \frac{1}{2} |x_\ell - a| \implies$

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap U(x_\ell) = \emptyset \implies$$

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \bigcup_{\ell=1}^n U(x_\ell) = \emptyset \implies (M \text{ wird überdeckt})$$

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap M = \emptyset$$

Dann kann a kein Häufungspunkt von M sein. □

(allg. Beweis im $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow$ Steffen An. I, p.578 f.)

Satz 12.3 : Approximationssatz Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Dann gilt:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Regelfunktion $\iff$ zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\varphi \in \mathcal{T}([a, b])$ mit $\ f - \varphi\ \leq \varepsilon$

$$D.h.: \sup_{x \in [a, b]} |\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Folgerung: $(\varepsilon = 1/n)$ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Regelfunktion $\iff$

$$\exists \varphi_n \in \mathcal{T}([a, b]) \text{ mit } \|f - \varphi_n\| \rightarrow 0 \text{ bei } n \rightarrow \infty.$$

Regelfunktionen sind genau die gleichmäßigen Limiten von Treppenfunktionen.

Beweis: “ $\implies$ ” $\varepsilon > 0$ gegeben - konstruiere eine Treppenfunktion φ mit $\|f - \varphi\| < \varepsilon \implies$
(Cauchy für Grenzwerte)

zu jedem $c \in [a, b]$ gibt es $I_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta)$ mit

$$(*) \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

für alle $x, y \in I_\delta(c)$ mit $x, y < c$ oder $x, y > c$.

(ist c Randpunkt, so hat man nur eine der beiden Möglichkeiten)

$$[a, b] \text{ kompakt und } [a, b] \subset \bigcup_c I_\delta(c) \implies [a, b] \subset I_{\delta_1}(c_1) \cup \dots \cup I_{\delta_n}(c_n)$$

ordne nun $c_1, \dots, c_n$ und die Endpunkte von $I_{\delta_\ell}(c_\ell)$ der Größe nach $\implies$ Zerlegung
 $Z = \{a = x_0 < \dots < x_N = b\}$ von $[a, b]$.

Fixiere $z_j \in (x_j, x_{j+1})$ beliebig und setze

$$\varphi(x) := \begin{cases} f(z_j), & x \in (x_j, x_{j+1}) \\ f(x_j), & x = x_j \end{cases}, x \in [a, b].$$

Beh.: $|\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ auf $[a, b]$.

denn: $x = x_j$

x verschieden von allen $x_0, \dots, x_N$: $\implies x \in (x_j, x_{j+1})$ für genau ein j ;

offenbar: $(x_j, x_{j+1}) \subset U_{\delta_\ell}(c_\ell)$ für ein passendes ℓ

es gilt: $\varphi(x) = f(z_j)$ mit $z_j \in (x_j, x_{j+1})$

$\implies x$ und z_j beide links oder rechts von c_ℓ

$\implies |f(x) - f(z_j)| < \varepsilon$, also $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$
*

Es folgt: $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon$.

“ $\Leftarrow$ ”: Sei $c \in [a, b]$

z.Z.: $\lim_{x \downarrow c} f(x)$ existiert

(alle anderen Fälle gehen analog!)

Cauchy Kriterium: Beh. $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit
 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle
 $x, y \in (c, c + \delta)$.

$\varepsilon > 0$ gegeben $\implies \exists \varphi \in \mathcal{T}([a, b])$ mit $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon/3$

φ hat als T.F. rechtsseitigen Limes α , d.h. $\exists \delta > 0$ mit

$$|\varphi(x) - \alpha| < \varepsilon/3 \quad \forall x \in (c, c + \delta)$$

bwz. $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon/3 \quad \forall x, y \in (c, c + \delta)$ nach Cauchy

$$\begin{aligned} \implies |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - f(y)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \end{aligned}$$

für alle $x, y \in (c, c + \delta)$. □

Bem.: Ist $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

so folgt: $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

(beachte: aus $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ folgt $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x$)

(Die Menge der Regelfunktionen ist abgeschlossen bzgl. glm. Kvgnz.)

Beweis: wähle nach 12.3 $\varphi_n \in \mathcal{T}([a, b])$ mit $\|\varphi_n - f_n\| \leq 1/n$

Dann: $\|f - \varphi_n\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n - \varphi_n\| \rightarrow 0,$

Satz 12.3 gibt die Beh. (Übung: Einzelheiten ausführen!) □

Definition 12.3 : Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Regelfunktion.

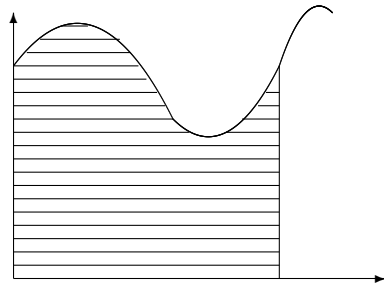
Das Integral von f über $[a, b]$ ist erklärt als

$$\boxed{\int_a^b f \, dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n \, dx},$$

wobei φ_n irgendeine Folge in $\mathcal{T}([a, b])$ ist mit $\|f - \varphi_n\| \rightarrow 0$.

Bem.: (zur Schreibweise): $\int_y^b f, \int_a^b f(x) \, dx, \int_a^b f(t) \, dt \dots$

Interpretation: “Flächeninhalt unter Graph (f)”



(Bem.: Das Riemann Integral ist allgemeiner !)

Wir müssen die Wohldefiniertheit von $\int_a^b f \, dx$ zeigen:

Gelte $\|\varphi_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \left\| \int_a^b \varphi_n \, dx - \int_a^b \varphi_m \, dx \right\| \stackrel{12.1}{=}$

$$\left| \int_a^b (\varphi_n - \varphi_m) \, dx \right| \stackrel{12.1}{\leq} \|\varphi_n - \varphi_m\| \cdot (b - a)$$

$\varepsilon > 0$ gegeben $\implies \exists N \in \mathbb{N} : \|\varphi_n - \varphi_m\| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \leq N$

(denn $\|\varphi_n - \varphi_m\| \leq \|\varphi_n - f\| + \|\varphi_m - f\|$).

Also: $\left\{ \int_a^b \varphi_n \, dx \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge, d.h. konvergent in $\mathbb{C}$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n \, dx$ hängt nicht von der Approximation ab: gilt $\|\Psi_n - f\| \rightarrow 0$,

so folgt $\|\varphi_n - \Psi_n\| \leq \|\varphi_n - f\| + \|f - \Psi_n\| \rightarrow 0$ und daher

$$\left| \int_a^b \varphi_n \, dx - \int_a^b \Psi_n \, dx \right| \leq \|\varphi_n - \Psi_n\| \cdot (b - a) \rightarrow 0.$$

□

Folgerung:

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{stetig,}$$

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{monoton oder BV}$$

$$\implies \int_a^b f \, dx \quad \text{existiert}$$

Anmerkung: $\int_a^b f \, dx$ ist nur für Regelfunktionen f erklärt,

also z.B. nicht für $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.

Rechenregeln für das Integral einer T.F. $\implies$

Satz 12.4 : (Eigenschaften des Integrals) $\int_a^b : \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$

Seien $f, g \in \mathcal{R}([a, b]), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$(i) \text{ Linearität: } \int_a^b (\alpha f + \beta g) \, dx = \alpha \cdot \int_a^b f \, dx + \beta \int_a^b g \, dx.$$

$$(ii) \text{ Abschätzung: } \left| \int_a^b f \, dx \right| \leq \int_a^b |f| \, dx \leq \|f\| \cdot (b - a).$$

$$(iii) \text{ Monotonie: } f, g \text{ reell, } f \leq g \implies \int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g \, dx.$$

Bem.: 1) $f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies |f| \in \mathcal{R}([a, b])$, so dass $\int_a^b |f| \, dx$ Sinn macht.

$$2) \quad \boxed{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ Regelfunktion} \implies f \text{ beschränkt,}}$$

$$\text{d.h. } \|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| < \infty.$$

(**Beweis v. 2**): x_n Folge in $[a, b]$ mit $|f(x_n)| \rightarrow \infty$

$[a, b]$ kompakt, also $\exists c \in [a, b]$ mit $x'_n \rightarrow c$ für Teilfolge (Bolzano - W.)

zeige: $|f(x'_n)| \rightarrow \infty$ widerspricht der Existenz einseitiger Limiten in c)

Beweis von Satz 12.4:

Wähle

$$i) \varphi_n, \Psi_n \in \mathcal{T}([a, b]), \|\varphi_n - f\| \rightarrow 0, \|\Psi_n - g\| \rightarrow 0$$

$$\implies \|(\alpha \varphi_n + \beta \Psi_n) - (\alpha f + \beta g)\| \rightarrow 0 \text{ und } \alpha \varphi_n + \beta \Psi_n \in \mathcal{T}([a, b])$$

$$\text{Also: } \int_a^b (\alpha f + \beta g) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (\alpha \varphi_n + \beta \Psi_n) \, dx \stackrel{\text{Satz 12.1}}{=} \alpha \int_a^b \varphi_n \, dx + \beta \int_a^b \Psi_n \, dx$$

$$= \alpha \int_a^b f \, dx + \beta \int_a^b g \, dx.$$

$$\text{ii) } \|\varphi_n - f\| \rightarrow 0 \implies \| |\varphi_n| - |f| \| \rightarrow 0 \text{ und } \|\varphi_n\| \rightarrow \|f\|$$

$$\text{und } \left| \int_a^b \varphi_n dx \right| \leq \int_a^b |\varphi_n| dx \leq \|\varphi_n\| \cdot (b-a)$$

Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in dieser Ungleichung ergibt Beh.

$$\left(\begin{array}{l} \text{(Anmerkung: } \left| |\varphi_n(x)| - |f(x)| \right| \leq |\varphi_n(x) - f(x)| \text{ bilde sup} \\ \implies \| |\varphi_n| - |f| \| \leq \|\varphi_n - f\|; \end{array} \right.$$

$$\text{außerdem: } |\varphi(x)| \leq |f(x)| + |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \|f\| + \|f - \varphi_n\|$$

$$\left. \begin{array}{l} \implies \|\varphi_n\| \leq \|f\| + \|f - \varphi_n\| \\ \text{und analog } \|f\| \leq \|\varphi_n\| + \|f - \varphi_n\| \end{array} \right\} \implies \|\varphi_n\| \rightarrow \|f\|$$

$$\text{(iii) } \exists \varphi_n \in \mathcal{T}([a, b]) \text{ mit } \|\varphi_n - f\| \rightarrow 0$$

$$\xRightarrow{f \text{ reellwertig}} \|\operatorname{Im} \varphi_n\| \rightarrow 0, \|\operatorname{Re} \varphi_n - f\| \rightarrow 0$$

$$\text{also: } \operatorname{Re} \varphi_n \text{ reelle Treppenfkt mit } \|\operatorname{Re} \varphi_n - f\| \rightarrow 0$$

$$\text{nehme also direkt an: } \varphi_n, \Psi_n \text{ reelle T.F. mit } \|\varphi_n - f\| \rightarrow 0, \|\Psi_n - g\| \rightarrow 0$$

$$\text{setze } \tilde{\varphi}_n := \varphi_n - \|f - \varphi_n\| \leq f$$

$$\tilde{\Psi}_n := \Psi_n + \|g - \Psi_n\| \geq g$$

$$\implies \tilde{\varphi}_n, \tilde{\Psi}_n \in \mathcal{T}([a, b]), \|\tilde{\varphi}_n - f\| \rightarrow 0, \|\tilde{\Psi}_n - g\| \rightarrow 0,$$

$$\tilde{\varphi}_n \leq \tilde{\Psi}_n, \text{ so dass } \int_a^b \tilde{\varphi}_n dx \leq \int_a^b \tilde{\Psi}_n dx$$

nun benutze Satz 12.1.

□

Satz 12.5 : (Additivität bzgl. der Integrationsgrenzen)

Sei $[a, c]$ kompaktes Intervall, $a < b < c$, und $f \in \mathcal{R}([a, c])$
 Dann gilt:

$$\int_a^c f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx,$$

wobei rechts die Integrale der Regelfunktionen $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ stehen.

Beweis: 1) $\varphi \in \mathcal{T}([a, c])$.

also $\varphi \equiv c_\ell$ auf $(x_\ell, x_{\ell+1})$ für eine Zerlegung $\{a = x_0 < \dots < x_n = c\}$ von $[a, c]$.

Sei etwa $b \in (x_\ell, x_{\ell+1}) \implies$

$$Z' := \{a = x_0 < \dots < x_\ell < b < x_{\ell+1} < \dots < x_n\}$$

ist Zerlegung von $[a, c]$ zusammengesetzt aus den Zerlegungen

$$\{a = x_0 < \dots < x_\ell < b\} \text{ von } [a, b],$$

$$\{b < x_{\ell+1} < \dots < x_n\} \text{ von } [b, c]$$

Daraus folgt $\int_a^b \varphi dx + \int_b^c \varphi dx = \int_a^c \varphi dx$ trivial.

Ist b Teilpunkt von Z , so argumentiert man analog.

$$2) \quad f|_{[a,b]} \in \mathcal{R}([a, b]) \implies \exists \varphi_n \in \mathcal{T}([a, b]) \text{ mit } \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi_n(x)| \longrightarrow 0$$

$$\text{analog: } \Psi_n \in \mathcal{T}([b, c]) \text{ mit } \sup_{x \in [b,c]} |f(x) - \Psi_n(x)| \longrightarrow 0.$$

$$\text{Setze } \lambda_n(x) := \begin{cases} \varphi_n(x) & \text{auf } [a, b] \\ \Psi_n(x) & \text{auf } (b, c] \end{cases} \in \mathcal{T}([a, c]).$$

$$\text{Dann: } \sup_{x \in [a,c]} |f - \lambda_n| \longrightarrow 0 \implies \underline{\text{Beh.}} \text{ mit 1) für } \lambda_n$$

$$\underline{\text{Konvention:}} \quad 1) \quad \int_a^a f dx = 0$$

$$2) \quad a < b, f \in \mathcal{R}((a, b]) \implies \int_b^a f dx := - \int_a^b f dx.$$

$$\underline{\text{Folgerung:}} \quad \left| \begin{array}{l} \int_a^c f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx \\ \text{gilt für alle } a, b, c \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

□

Die Monotonie des Integrals kann folgendermaßen verschärft werden.

Satz 12.6 : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig mit $f \geq 0$.

Gilt an einer Stelle $x_0 \in [a, b]$ $f(x_0) > 0$, so folgt: $\int_a^b f(x) dx > 0$.

M.a.W.: $f \geq 0$ stetig mit $\int_a^b f dx = 0 \implies f = 0$.

Bem.: Für Regelfunktionen gilt das natürlich nicht, denn

$$f = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{array} \right\} \text{ hat über } [0, 1] \text{ Integral } 0.$$

Beweis: o.E. $x_0 \in (a, b) \implies \exists \delta > 0$ mit $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)$ auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$

Dann ist

$$\varphi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} f(x_0), & x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right.$$

aus $\mathcal{T}([a, b]) \subset \mathcal{R}([a, b])$ mit $f \geq \varphi$ auf $[a, b]$

Monotonie $\implies \int_a^b f dx \geq \int_a^b \varphi dx = 2\delta \cdot \frac{1}{2} f(x_0) = \delta \cdot f(x_0) > 0$. □

Berechnung von Integralen mit Riemannschen Summen:

bis jetzt: $\int_a^b f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n dx$ für eine Folge $\{\varphi_n\}$ in $\mathcal{T}([a, b])$, die gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{R}([a, b])$ konvergiert.

Wie bestimmt man konkret eine solche Folge?

einfacher: finde $\Psi_n \in \mathcal{T}([a, b])$, so dass zwar $\int_a^b \Psi_n dx \rightarrow \int_a^b f dx$ gilt, aber nicht unbedingt $\|\Psi_n - f\| \rightarrow 0$.

Definition 12.4 : Riemannsche Summen

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $Z := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Es seien $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$ beliebige "Zwischenstellen". Dann heißt

$$\sum_{k=1}^n f(z_k) \cdot \Delta x_k := \sum_{k=1}^n f(z_k) (x_k - x_{k-1})$$

Riemannsche Summe zur Zerlegung Z und den Stützstellen z_k .

$\delta_Z := \max \{\Delta x_k : k = 1, \dots, n\}$ Feinheit von Z .

Satz 12.7 : Approximation durch Riemannsche Summen

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Regelfunktion. Dann findet man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ wie folgt:

Für jede Zerlegung $Z = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ mit Feinheit $< \delta$ und jede Wahl von Stützstellen z_k ist

$$\left| \int_a^b f dx - \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta x_k \right| < \varepsilon.$$

Bem.:

$$\left| \begin{array}{l} Z_n \text{ Folge von Zerlegungen mit Feinheit} \rightarrow 0 \\ S_n = \text{Riemannsche Summe zu } Z_n \text{ bei beliebiger Wahl von Stützstellen} \\ \implies \int_a^b f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n. \end{array} \right.$$

Beweis:

a) $f \in \mathcal{T}([a, b])$

Fall 1: $f \equiv c$ auf $[a, b]$

trivial, da $\int_a^b f dx = \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta x_k$ für jede Zerlegung

Z mit Feinheit $< \delta := b - a$.

Fall 2: f nicht konstant

$m := \#$ Sprungstellen von f

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ setze $\delta := \frac{\varepsilon}{4m\|f\|}$

Sei $Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ Zerlegung von $[a, b]$ mit $\delta_z < \delta$

wähle Stützstellen $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=1}^n f(z_k) \cdot \Delta x_k - \int_a^b f dx &\stackrel{12.5}{=} \\ \sum_{k=1}^n \left[f(z_k) \cdot \Delta x_k - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f dx \right] \end{aligned}$$

Sei $k \in \{1, \dots, n\}$ fixiert:

i) $[x_{k-1}, x_k]$ enthält keine Sprungstelle

$$\Rightarrow f \equiv f(z_k) \text{ auf } [a, b], \text{ so dass } f(z_k) \cdot \Delta x_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f dx$$

ii) $[x_{k-1}, x_k]$ enthält mindestens eine Sprungstelle: man schätzt grob ab:

$$\left| f(z_k) \Delta x_k - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f dx \right| \leq 2 \cdot \|f\| \cdot \Delta x_k.$$

Da eine Sprungstelle höchstens zu zwei Intervallen $[x_{\ell-1}, x_\ell]$, $[x_{k-1}, x_k]$ gehört (nämlich dann, wenn sie gemeinsamer Randpunkt ist), gibt es höchstens $2m$ Intervalle, für die ii) eintritt.

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta x_k - \int_a^b f dx \right| \leq 2 \cdot m \cdot 2\|f\| \cdot \delta_z < \varepsilon$$

nach Def. von δ .

b) $f \in \mathcal{R}([a, b])$:

Wähle $\varphi \in \mathcal{T}([a, b])$ mit $\|f - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$

Nach a) gibt es $\delta > 0$ mit

$$* \quad \left| \sum_{k=1}^n \varphi(z_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b \varphi dx \right| < \varepsilon/3$$

für alle Zerlegungen Z mit $\delta_z < \delta$ und beliebige Wahl von $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Sei Z eine solche Zerlegung mit beliebiger Wahl z_k von Stützstellen $\implies$

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{k=1}^n f(z_k) \cdot \Delta x_k - \int_a^b f dx \right| \leq \\
 & \left| \int_a^b f dx - \int_a^b \varphi dx \right| + \left| \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta x_k - \int_a^b \varphi dx \right| \leq \\
 & \|f - \varphi\| \cdot (b - a) + \left| \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta x_k - \sum_{k=1}^n \varphi(z_k) \Delta x_k \right| \\
 & + \left| \sum_{k=1}^n \varphi(z_k) \Delta x_k - \int_a^b \varphi dx \right| \\
 & \leq 2 \cdot \|f - \varphi\| (b - a) + \varepsilon/3 < \frac{2}{3}\varepsilon + \varepsilon/3 = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

□

Bem.: 1) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Regelfunktion.

$Z = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ Zerlegung, $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$ definiert eine Treppenfunktion φ durch

$$\varphi(x) \equiv f(z_k) \text{ auf } [x_{k-1}, x_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Es gilt: $\int_a^b \varphi dx \longrightarrow \int_a^b f dx$ bei $\delta_z \longrightarrow 0$, aber nicht unbedingt $\|\varphi - f\| \longrightarrow 0$.

2) Verallgemeinerung des Integralbegriffs: Riemann-Integral

$Z =$ Zerlegung von $[a, b]$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt

$$\text{Obersumme} := \sum_{k=1}^n \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot \Delta x_k = O(Z)$$

$$\text{Untersumme} := \sum_{k=1}^n \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \cdot \Delta x_k = U(Z)$$

$O(Z) \left(U(Z) \right)$ monoton fallend (wachsend), wenn δ_z kleiner wird

$\implies \lim_{\delta_z \rightarrow 0} O(Z)$ und $\lim_{\delta_z \rightarrow 0} U(Z)$ existieren.

Sind die Grenzwerte gleich, so nennt man f auf $[a, b]$ Riemann integrierbar

Es gilt: $\boxed{f \text{ Regelfunktion} \implies f \text{ Riemann integrierbar}}$

Dagegen ist $f(x) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \sin 1/x, & x \neq 0 \end{cases} \notin \mathcal{R}([0, 1])$, aber Riemann integrierbar auf $[0, 1]$.

Mit Hilfe des Riemann Integrals läßt sich “das Integral” auch für Funktionen mit gewissem Oszillationsverhalten definieren. $\square$

Beispiele: Integralbestimmung mit Riemannschen Summen

1) $\int_0^b x^2 dx = ? \quad (b > 0)$

wähle äquidistante Zerlegung $x_k := \frac{k}{n} b, \quad k = 0, \dots, n$ und setze $z_k = x_k$

$$\begin{aligned} \text{Dann} \quad \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 b^2 \cdot \left(\frac{k}{n} b - \frac{k-1}{n} b\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \cdot b^3 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{3} \end{aligned}$$

allgemeiner: $m \in \mathbb{N}, \quad b > 0 \implies \boxed{\int_0^b x^m dx = \frac{b^{m+1}}{m+1}}$

2) $\int_a^b \frac{1}{x} dx = ? \quad (0 < a < b)$

die Zerlegung von oben ist ungünstig, besser:

$$x_k := \left(\frac{b}{a}\right)^{k/n} \cdot a, \quad k = 0, \dots, n, \quad z_k := x_{k-1} \implies$$

$$\sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k-1}{n}} a \cdot \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{k/n} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n}}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right) = n \cdot \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1\right)$$

$$\text{Es gilt } \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \left(\left(\frac{b}{a}\right)^t - 1\right) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \left(e^{t \ln \frac{b}{a}} - 1\right) = \ln b/a \quad \text{nach L'Hospital,}$$

also $\left(“t = 1/n”\right): \quad \boxed{\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b/a}.$

$\square$

Die Berechnung von Integralen via Riemannscher Summen ist nur in ganz einfachen Fällen praktisch ausführbar. Allerdings kann man mit R-Summen Ungleichungen zwischen Integralen beweisen:

Notation: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Regelfunktion, $p \geq 1$. Dann heißt

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f|^p dx \right)^{1/p}$$

die p -Norm von f .

Bemerkung: $f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies |f|^p \in \mathcal{R}([a, b])$.

Man hat

Höldersche Ungleichung: $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\implies \int_a^b |f \cdot g| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Im Spezialfall $p = q = 2$ liest sich dies also:

$$\left| \int_a^b |f \cdot g| dx \leq \sqrt{\int_a^b |f|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b |g|^2 dx} \right|$$

(Cauchy-Schwarz Ungleichung für Integrale)

Zum Beweis beachte die

Hölde'sche Ungl. für Summen:

$$* \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^N |a_k| \cdot |b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^N |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^N |b_k|^q \right)^{1/q} \\ a_k, b_k \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

* sieht man so:

für $a, b > 0$ ist $\ln(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b) \geq \frac{1}{p} \ln a + \frac{1}{q} \ln b$, da $\ln$ konkav -

$$\text{also: } \ln\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right) \geq \ln(a^{1/p} \cdot b^{1/q}) \stackrel{\text{exp}}{\implies}$$

$$** \quad a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b,$$

was sich auch aus der allg. Ungl. zwischen arith. und geom. Mittel ergibt.

** gilt auch für a oder $b = 0$.

$$** \implies \sum_{k=1}^N |z_k|^{1/p} |w_k|^{1/q} \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^N |z_k| + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^N |w_k| \quad \text{für beliebig } z_k, w_k \in \mathbb{C}.$$

Ersetze z_k, w_k durch $z_k / \sum |z_\ell|, w_k / \sum |w_\ell| \implies$

$$\sum_{k=1}^N |z_k|^{1/p} |w_k|^{1/q} \leq \left(\sum_{k=1}^N |z_k| \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^N |w_k| \right)^{1/q}.$$

Diese Ungleichung wendet man schließlich an auf $z_k = |a_k|^p, w_k = |b_k|^q$.

Seien nun $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Betrachte äquidistante Zerlegung Z_n von $[a, b]$ mit Schrittweite $\frac{b-a}{n} =: \Delta_n$ und beliebigen Zwischenpunkten $\xi_k^n, n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n$. Aus * folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |f(\xi_k^n)| \cdot |g(\xi_k^n)| \cdot \Delta_n &\leq (\Delta_n = \Delta_n^{1/q} \cdot \Delta_n^{1/p}) \\ \left(\sum_{k=1}^n |f(\xi_k^n)|^p \Delta_n \right)^{1/p} &\left(\sum_{k=1}^n |g(\xi_k^n)|^q \Delta_n \right)^{1/q} \end{aligned}$$

Das sind drei Riemannsche Summen, mit $n \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung. □

Wir notieren noch

Satz 12.8 : (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $p \in \mathcal{R}([a, b])$ sei ≥ 0 .

Dann gibt es ein $y \in [a, b]$ mit

$$\boxed{\int_a^b f(x)p(x) dx = f(y) \int_a^b p(x) dx.}$$

Im Spezialfall $p \equiv 1$ hat man

$$\int_a^b f(x) dx = f(y)(b-a).$$

Beweis: Es gilt die Abschätzung (wegen $p \geq 0$)

$$\min_{[a,b]} f \cdot \int_a^b p(x) dx \leq \int_a^b f(x) p(x) dx \leq \max_{[a,b]} f \cdot \int_a^b p(x) dx.$$

Ist $\int_a^b p(x) dx = 0$, so folgt $\int_a^b f(x) p(x) dx = 0$, so dass y beliebig gewählt werden kann. Andernfalls folgt

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \Big/ \int_a^b p(x) dx \in [\min f, \max f],$$

und das Intervall rechts kommt nach dem ZWS als f -Bild vor. $\square$

Wie wir gesehen haben, ist die Integralberechnung mit Riemannschen Summen mühsam. Zentrales Werkzeug ist

Satz 12.9 : Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Es sei $f \in \mathcal{R}([a, b])$. Man definiert $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ durch

* $F(x) := \int_a^x f(t) dt$. Dann gilt:

- (i) F ist Lipschitz auf $[a, b]$: $|F(x) - F(y)| \leq \|f\| \cdot |x - y|$.
- (ii) F ist in allen $x \in (a, b)$ links- und rechtsseitig differenzierbar, in den Randpunkten nur einseitig mit $F'_\pm(x) = f(x_\pm)$.

Ist $f \in C^0([a, b])$, so gilt $F \in C^1(a, b)$ mit $F' = f$.

Beweis: Die letzte Aussage folgt aus (ii)

- (i) $f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies \int_a^x f(t) dt$ existiert für alle $x \in [a, b]$, d.h. F ist gemäß * wohldefiniert mit

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^y f(t) dt \right| = \left| \int_y^x f(t) dt \right| \leq \|f\| \cdot |x - y|.$$

- (ii) Sei $x < b$. Zeige: $F'_+(x) = f(x_+)$.

Sei $h > 0$ mit $x + h \leq b \implies$

$$F(x + h) - F(x) \underset{\text{s.o.}}{=} \int_x^{x+h} f(t) dt,$$

$$f(x_+) \cdot h = \int_x^{x+h} f(x_+) dt \quad (\text{Integral der konst. Fkt.})$$

$$\implies \left| \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) - f(x+) \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x+)| dt$$

$$\varepsilon > 0 \text{ gegeben} \implies \exists \delta > 0 : |f(t) - f(x+)| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in [x, x+\delta)$$

Übung: $\varphi \in \mathcal{R}([a, b])$, $I \subset \{\text{Sprungstelle von } \varphi\}$

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & x \notin I \\ \varphi(x+), & x \in I \quad (\text{oder } \varphi(x-)) \end{cases}, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

$$\implies \tilde{\varphi} \in \mathcal{R}([a, b]) \text{ und } \int_{\alpha}^{\beta} \varphi dt = \int_{\alpha}^{\beta} \tilde{\varphi} dt$$

$$\text{Also ist } \int_x^{x+h} |f(t) - f(x+)| dt = \int_x^{x+h} \Psi(t) dt,$$

$$\Psi(t) = \begin{cases} 0, & t = x \\ |f(t) - f(x+)|, & x < t \leq x+h, \end{cases}$$

$$\text{und } 0 \leq \Psi(t) < \varepsilon \quad \text{für } h \leq \delta \implies$$

$$\left| \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) - f(x+) \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon dt = \varepsilon. \quad \square$$

Korollar: Sei I ein offenes Intervall $\subset \mathbb{R}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.
Dann hat f eine Stammfunktion $F : I \rightarrow \mathbb{C}$, z.B.

$$x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$$

für irgendeine Stelle $x_0 \in I$.

Notation: unbestimmtes Integral zu $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ (stetig)

bekanntlich: F_1, F_2 Stammfkt. zu $f \implies F_2 = F_1 + c$ mit $c \in \mathbb{C}$

also: erhalte alle Stammfunktionen zu f durch Wahl einer bestimmten und Addition einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{ccc} \text{symbolisch :} & \int f(x) dx & := \{F + c : c \in \mathbb{C}\} \\ & \uparrow & \uparrow \\ & \text{“das unbestimmte} & \text{fixierte Stammfkt} \\ & \text{Integral”} & \end{array}$$

oftmals auch: $\int f(x) dx = F + c, c \in \mathbb{C}$

z.B.:

$$\int x^a \cdot dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c, \quad a \neq -1, \quad x > 0$$

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c.$$

Da sich alle Stammfunktionen nur um Konstanten unterscheiden, folgt

Korollar (zum Hauptsatz; Integralberechnung):

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion zu f . Dann gilt für alle $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) (= F|_a^b).$$

Man berechnet also Integrale $\int_a^b f(x) dx$ durch “Bestimmen” einer Stammfunktion zu F .

[**Warnung !** Das heißt nicht, dass man Stammfunktionen immer durch geschlossene Formeln angeben kann.]

Bspl.: $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x|_a^b = \ln b/a, \quad 0 < a < b.$

Wir kommen zu einigen

Integrationsregeln: (Schema: Ableitungsregeln + Hauptsatz)

I. Partielle Integration (Produktintegration) $\longleftrightarrow$ Produktregel für $\frac{d}{dx}$

$$\boxed{\begin{array}{l} u, v \in C^1(I) \implies \int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' v dx \\ \text{bzw.} \quad \int_a^b u \cdot v' dx = (u \cdot v)|_a^b - \int_a^b u' v dx \end{array}}$$

Beweis: $\int_a^b u \cdot v' dx = \underbrace{\int_a^b (u \cdot v)' dx}_{= (uv)'|_a^b \text{ nach Hauptsatz}} - \int_a^b u' \cdot v dx.$

Beispiele: (man muss u, v passen definieren)

$$\begin{array}{cc} u & v \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

i) $a \neq -1: \int x^a \cdot \ln x dx = \int \ln x \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a+1} x^{a+1} \right) dx =$

$$\ln x \cdot \frac{1}{a+1} x^{a+1} - \int \frac{d}{dx} (\ln x) \frac{1}{a+1} x^{a+1} dx =$$

$$\ln x \cdot \frac{1}{a+1} x^{a+1} - \int \frac{1}{a+1} x^a dx = x^{1+1} \left(\frac{1}{a+1} \ln x - \frac{1}{(a+1)^2} \right).$$

ii) in manchen Fällen ist im Integral gar kein Produkt, dann denkt

man sich $v' \equiv 1$, also $v(x) = x$.

Seien $-1 < \alpha < \beta < 1$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{d}{dx} x dx =$$

$$\left(\sqrt{1-x^2} \cdot x \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{1-x^2} dx =$$

$$\left(x \cdot \sqrt{1-x^2} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Es gilt

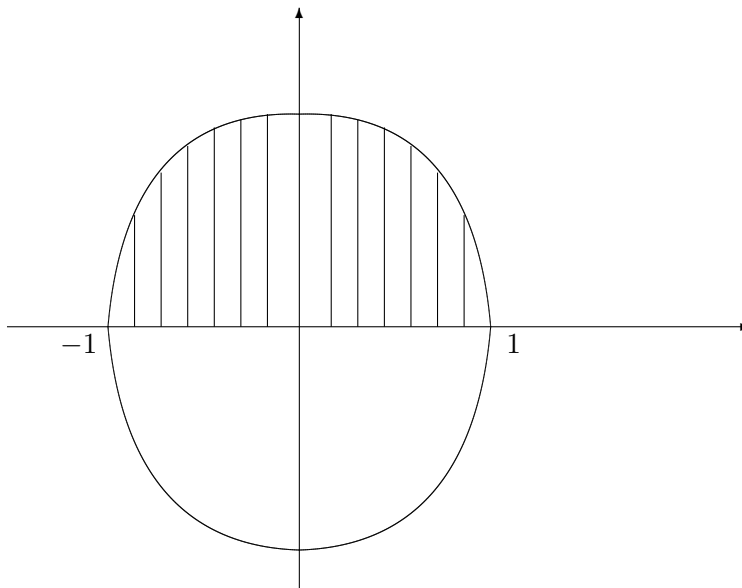
$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \arcsin x \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1-x^2} dx \implies$$

$$* \quad \boxed{\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) \Big|_{\alpha}^{\beta}}$$

Das Ergebnis gilt gemäß Herleitung zunächst nur für $-1 < \alpha < \beta < 1$ linke u. rechte Seite hängen stetig ab von $\alpha, \beta \in [-1, 1]$, d.h. man darf auch die Grenzpunkte einsetzen.

Anwendung: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ 1-Kreis um 0



oberer Halbkreis = Gebiet zwischen x -Achse und dem Graphen von $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$,
 $-1 \leq x \leq 1$

Flächeninhalt davon $= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \implies$

$\text{Inhalt von } D = 2 \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \arcsin x \Big _{-1}^1 = \pi$

$\rightsquigarrow$ altbekannte geometrische Interpretation

- iii) Integrale der Form $\int x^n e^x dx$, $\int x^n \cdot \cos x dx$, $\int x^n \sin x dx$, $n \in \mathbb{N}$, lassen sich schrittweise berechnen:

$$I_n := \int x^n e^x dx = \int x^n \cdot \frac{d}{dx} e^x dx = x^n e^x - \int n \cdot x^{n-1} e^x dx = x^n \cdot e^x - n \cdot I_{n-1}$$

ist eine Rekursionsformel, und mit

$$I_0 = \int e^x dx = e^x + C$$

folgen alle anderen Werte.

entsprechend: $\int x^n \cdot \cos x dx = \int x^n \frac{d}{dx} \sin x dx = x^n \cdot \sin x - n \int x^{n-1} \cdot \sin x dx = x^n \cdot \sin x + n \cdot \int x^{n-1} \frac{d}{dx} \cos x dx = x^n \cdot \sin x + n x^{n-1} \cos x + n(n-1) \int x^{n-2} \cos x dx$, wobei die partielle Integrationsformel zweimal angewendet worden ist

Mit $J_n := \int x^n \cdot \cos x \, dx$ folgt also

$$J_n = n \cdot (n-1) J_{n-2} + x^n \cdot \sin x + n \cdot x^{n-1} \cos x$$

$$\int x^n \cdot \sin x \, dx \longrightarrow \text{Übung!}$$

iv) $\int \sin^k x \, dx, \int \cos^k x, k \geq 2$:

$$\begin{aligned} \int \sin^k x \, dx &= \int \sin^{k-1} x \cdot \sin x \, dx = - \int \sin^{k-1} x \cdot \frac{d}{dx} \cos x \, dx = \\ &= - \sin^{k-1} x \cdot \cos x + (k-1) \int \sin^{k-2} x \cdot \cos x \cdot \cos x \, dx = \\ &= - \sin^{k-1} x \cdot \cos x + (k-1) \int \sin^{k-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx = \\ &= - \sin^{k-1} x \cdot \cos x + (k-1) \int \sin^{k-2} x \, dx - (k-1) \int \sin^k x \, dx \implies \end{aligned}$$

analog:
$$\begin{aligned} \int \sin^k x \, dx &= -\frac{1}{k} \sin^{k-1} x \cos x + \frac{k-1}{k} \int \sin^{k-2} x \, dx \\ \int \cos^k x \, dx &= \frac{1}{k} \cos^{k-1} x \sin x + \frac{k-1}{k} \int \cos^{k-2} x \, dx. \end{aligned}$$

II. Substitutionsregel (Variablentransformation) ($\leftrightarrow$ Kettenregel)

Seien $f \in C^0(I, \mathbb{C})$, $\varphi \in C^1([a, b], \mathbb{C})$ mit $\varphi([a, b]) \subset I$

Dann ist:
$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx.$$

Bem.:

- 1) $*$ ist nötig, um $f \circ \varphi$ bilden zu können.
- 2) beachte (ZWS): $\varphi([a, b])$ ist kompaktes Intervall.
- 3) in der Praxis: $\int_A^B f(x) \, dx = ?$
 suche dann "geeignetes" $\varphi: [a, b] \rightarrow [A, B]$, $\varphi(a) = A$, $\varphi(b) = B$, und benutze die Formel.
 Es gibt kein Patentrezept für die beste Wahl von $\varphi \rightarrow$ Erfahrung und Übung!
- 4) es gilt nicht $\int_a^b f(\varphi(t)) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx$!
 Dieser Fehler wird häufig gemacht.
- 5) beim unbestimmten Integral schreibt man

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = \left\{ \int f(x) \, dx \right\}_{\varphi}$$

um anzudeuten, dass man die rechts gefundene Stammfunktion $\int f(x) \, dx$ mit φ verkettet muss, sonst stimmt das Ergebnis nicht.

Beweis (Substregel): $\int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt =$ Kettenregel
↙

$$\int_a^b \frac{d}{dt} (F \circ \varphi) dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) =$$

↙
Hauptsatz

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} F'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx,$$

wenn F eine Stammfunktion zu f ist.

Beispiele:

$$(i) \int_a^b f(t+c) dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx, \quad x = \varphi(t) = t+c$$

Translation

$$(ii) \int_a^b f\left(\frac{t}{c}\right) dt = c \int_a^b \frac{1}{c} \cdot f\left(\frac{t}{c}\right) dt$$

$$= c \cdot \int_{a/c}^{b/c} f(x) dx, \quad x = \varphi(t) = t/c, \quad c \neq 0$$

$$(iii) \boxed{\int \varphi'(t) / \varphi(t) dt = \ln |\varphi(t)| + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

denn: für $\varphi(t) > 0$ ist ja $\frac{d}{dt} \ln \varphi(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \varphi'(t)$ nach der Kettenregel; auf Bereichen mit $\varphi(t) < 0$ analog

$$(iv) \boxed{\int \frac{dx}{x^2+2bx+c} \text{ mit } b, c \in \mathbb{R} \quad ?}$$

$$\text{schreibe } x^2 + 2bx + c = (x+b)^2 + (c-b^2)$$

Fall 1: $c < b^2$ (2 verschiedene reelle Nullstellen)

$$d := \sqrt{b^2 - c} \quad \text{dann} \quad \frac{1}{x^2+2bx+c} = \frac{1}{(x+b)^2-d^2} = \frac{1}{2d} \left(\frac{1}{x+b-d} - \frac{1}{x+b+d} \right)$$

die Terme rechts kann man separat nach iii) integrieren $\implies$

$$\int \frac{1}{x^2 + 2bx + c} dx = \frac{1}{2d} \left(\ln |x + b - d| - \ln |x + b + d| \right) = \frac{1}{2d} \ln \left| \frac{x + b - \sqrt{b^2 - c}}{x + b + \sqrt{b^2 - c}} \right|.$$

Fall 2: $c = b^2 \implies -b$ ist doppelte Nullstelle

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2bx + b^2} = \int \frac{dx}{(x + b)^2} = -\frac{1}{x + b}$$

(unter Weglassen der Integrationskonstanten)

Fall 3: $c > b^2$ (keine reellen Nullstellen)

Variablentransformation $\varphi(x) = \frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}} \implies$

$$\frac{1}{x^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) + 1}, \text{ also}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + bx + c} dx = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \int \frac{1}{\varphi^2(x) + 1} \varphi'(x) dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \left\{ \int \frac{1}{1 + y^2} dy \right\}_{y=\varphi(x)} = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \arctan \varphi(x) =$$

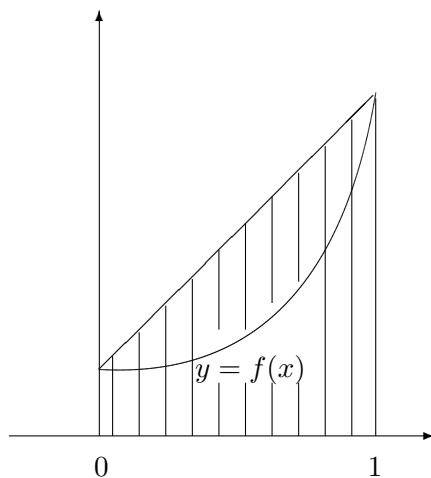
$$\frac{1}{c-b^2} \arctan \frac{x+b}{c-b^2}.$$

Zur numerischen Berechnung von Integralen

Satz 12.10 : (Trapez-Regel)

Sei $f \in C^2((0, 1], \mathbb{R})$. Dann gibt es ein $x_o \in [0, 1]$ mit

$$\boxed{\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) - \frac{1}{12} f''(x_o)}$$

Bem.:

$$\frac{1}{2} (f(0) + f(1)) = \text{Fläche des Trapezes}$$

$$-\frac{1}{12} f''(x_0) = \text{Korrekturterm}$$

Beweis: Sei $\varphi(x) := \frac{1}{2} x(1-x) \geq 0$ auf $[0, 1] \implies$

$$\int_0^1 f(x) dx = -\int_0^1 \varphi''(x) f(x) dx = \underbrace{-\varphi(x) f(x) \Big|_0^1}_{= \frac{1}{2} (f(0) + f(1))} + \int_0^1 \varphi'(x) f'(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) + \underbrace{(\varphi(x) \cdot f'(x)) \Big|_0^1}_{= 0} - \int_0^1 \varphi(x) f''(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) - f''(x_0) \underbrace{\int_0^1 \varphi(x) dx}_{= 1/12}$$

nach dem MWS der Integralrechnung. □

Korollar: Es sei $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ und $K := \sup \{|f''(x)| : a \leq x \leq b\}$

Für $n \in \mathbb{N}$ und $h := \frac{b-a}{n}$ gilt dann:

$$\int_a^b f(x) dx = \left\{ \frac{1}{2} f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k \cdot h) + \frac{1}{2} f(b) \right\} \cdot h + R$$

mit

$$|R| \leq \frac{K}{12} (b-a) \cdot h^2 = \frac{K}{12} (b-a)^3 \frac{1}{n^2}.$$

Beweis: wende 12.10 an auf die Intervalle $[a + (k-1)h, a + k \cdot h]$ und summiere über k .

Bem.: für $n \rightarrow \infty$ erhält man eine Approximation des Integrals durch Summen.

□

Integration einiger Klassen von elementaren Funktionen (→ Übungen!)

1) Rationale Funktionen mit reellen Koeffizienten (→ Partialbruchzerlegung)

Sei $R = P/Q$; $\int R(x) dx = ?$

P, Q zunächst komplexe Polynome Vorgehensweise:

i) Fundamentalsatz der Algebra $\implies$ (o.E. Leitkoeff. von $Q = 1$)

$$Q(z) = (z - \alpha_1)^{n_1} (z - \alpha_2)^{n_2} \dots (z - \alpha_s)^{n_s}$$

α_k = Nullstellen von Q , n_k = Vielfachheit von α_k , $k = 1, \dots, s \longrightarrow$ o.E.
 $P(\alpha_k) \neq 0$, sonst kürzen!

ii) zeige: es gibt ein eindeutig bestimmtes Polynom p mit

$$* \quad R = H_1 + H_2 + \dots + H_s + p,$$

wobei die Hauptteile H_j erklärt sind durch

$$H_j(z) = \sum_{k=1}^{n_j} a_{jk} \cdot (z - \alpha_j)^{-k}, \quad j = 1, \dots, s$$

(es gilt $p \equiv 0$, falls $\text{grad} P < \text{grad} Q$!)

Die Koeffizienten a_{jk} werden eindeutig festgelegt durch die Forderung

$R - H_j$ ist in α_j nicht singulär.

iii) für $x \in \mathbb{R}$ folgt:

$$R(x) = \sum_{j=1}^s H_j(x) + p(x),$$

d.h. $\int R(x) dx$ zurückgeführt auf $\int H_j(x) dx$

beachte: $\left| \begin{array}{l} P, Q \text{ haben reelle Koeffizienten} \implies \\ \text{mit } \alpha \text{ ist auch } \bar{\alpha} \text{ Nullstelle von } Q, \text{ und zwar mit} \\ \text{derselben Vielfachheit.} \end{array} \right.$

Man fasse dann in * “ H_α und $H_{\bar{\alpha}}$ ” zusammen.
vgl. Beispiel (iv) von vorhin!

Beispiel: $\int \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^3 - 1} dx = ?$

$$\begin{aligned} \text{Ansatz : } Q(x) &= x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \\ &= (x - 1)\left(x + \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= (x - \alpha) \cdot (x - \beta)(x - \bar{\beta}), \quad \alpha = 1, \beta = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Vielfachheit jeweils 1

$$\implies R(x) = p(x) + \frac{a}{x - \alpha} + \frac{b}{x - \beta} + \frac{c}{x - \bar{\beta}}, \quad a, b, c \in \mathbb{C}$$

$$\implies p(x) = 0 \text{ aus Gradgründen und}$$

$$R(x) = \left\{ a \cdot (x - \beta)(x - \bar{\beta}) + b(x - \alpha)(x - \bar{\beta}) + c \cdot (x - \alpha)(x - \beta) \right\} / Q(x)$$

$$\implies 3x^2 + 2x - 2 = a \cdot (x - \beta)(x - \bar{\beta}) + b(x - \alpha)(x - \bar{\beta}) + c(x - \alpha)(x - \beta)$$

als Bestimmungsgleichung für a, b, c

$$\text{Vergleich} \implies \begin{cases} 3 &= a + b + c \\ 2 &= -a(\beta + \bar{\beta}) - b(\alpha + \bar{\beta}) - c(\alpha + \beta) \\ -2 &= a \cdot |\beta|^2 + b\alpha\bar{\beta} + c\alpha\beta \end{cases}$$

Einsetzen der Werte für α, β : $3 = a + b + c$

$$2 = a - b\left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - c\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$-2 = a + b\left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Lösung: $a = 1, \quad b = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}i, \quad c = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}i$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{1}{x-1} + \left[\frac{1 - \frac{2}{\sqrt{3}}i}{x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}i}{x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \left[\quad \right] &= \frac{b}{x-\beta} + \frac{\bar{b}}{x-\bar{\beta}} = \frac{x(b+\bar{b}) - (b\bar{\beta} + \beta\bar{b})}{x^2 - (\beta+\bar{\beta})x + |\beta|^2} \\ &= (2x+3) / (x^2+x+1) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{x^2+x+1}$$

mit

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|, \quad \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{d}{dx} \ln(x^2+x+1) dx = \ln(x^2+x+1)$$

$$\text{und } \int \frac{2}{x^2+x+1} dx = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \quad \text{nach Bspl. iv.}$$

$$\Rightarrow \int R(x) dx = \ln|x-1| + \ln(x^2+x+1) + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

ausführliche Darstellung: Ostrowski, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung p.232 f.

2) Reduktion auf Integrale reationale Funktionen

$R(x, y)$ = rationale Funktion in zwei Variablen

$$= P(x, y) / Q(x, y) \quad \text{z.B.} \quad \frac{x^4+y^6}{y^8+x^2+1}$$

P, Q = Polynome in x und y .

$$(i) \int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx = ? \quad n \in \mathbb{N}, a \neq 0$$

Transformation: $y = \sqrt[n]{ax+b}$ bzw. $x = \varphi(y) := \frac{1}{a}(y^n - b)$

$$\Rightarrow \int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx \Big|_{x=\varphi(y)} = \int R\left(\varphi(y), \sqrt[n]{a\varphi(y)+b}\right) \cdot \varphi'(y) dy$$

$$= \int R\left(\frac{1}{a}(y^n - b), y\right) \cdot \frac{n}{a} \cdot (y^{n-1} - b) dy$$

$$(ii) \int R(e^x) dx \text{ oder } \int R(\cosh x, \sinh x) dx = ?$$

$$\text{Transformation: } y = e^x \iff x = \ln y$$

$$\implies \int R(e^x) dx \Big|_{x=\ln y} = \int R(y) \frac{1}{y} dy \quad \text{bzw.}$$

$$\int R(e^x) dx = \int R(y) \frac{1}{y} dy \Big|_{y=e^x}$$

$$\text{und } \int R(\cosh x, \sinh x) dx = \int \frac{1}{y} R\left(\frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right), \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)\right) dy \Big|_{y=e^x}$$

$$(iii) \int R(\cos x, \sin x) dx = ?$$

$$y = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \implies \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \sin x = \frac{2y}{1+y^2} \quad *$$

$$\text{Transformation: } x = 2 \cdot \arctan y$$

$$\implies \cos(2 \arctan y) = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \sin(2 \arctan y) = \frac{2y}{1+y^2}$$

$$\text{also: } \int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}, \frac{2y}{1+y^2}\right) \frac{2}{1+y^2} dy \Big|_{y=\tan \frac{x}{2}}$$

$$(iv) \int R\left(x, \sqrt{ax^2 + b + c}\right) dx, \quad b^2 \neq a \cdot c, \quad \text{kann durch quadratische Ergänzung und lineare}$$

Transformation überführt werden in

$$\begin{array}{ccc} \int R\left(y, \sqrt{1+y^2}\right) dy & \text{oder} & \int R\left(y, \sqrt{1-y^2}\right) dy & \text{oder} & \int R\left(y, \sqrt{y^2-1}\right) dy \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ y = \sinh z & & y = \cos z & & y = \cosh z \end{array}$$

$$\implies \text{Integrale vom Typ (ii) oder (iii)}$$

Achtung: Es gibt Funktionen, deren Stammfunktion nicht mehr elementar

ausgedrückt werden kann, etwa $\int e^{x^2} dx$.

Dabei verstehen wir unter einer elementaren Funktion

Polynome, Exponentialfunktionen, Logarithmen, trigonometrische Funktionen und deren Umkehrfunktionen

sowie alle Funktionen, die man aus o.g. durch endliche Verkettungen und endliche Durchführung algebraischer Operationen gewinnen kann.

Die Stammfunktion von e^{x^2} ist nicht von dieser Form, so dass man nicht grundsätzlich

$$\int f(x) dx$$

“ausrechnen” kann. □

Uneigentliche Integrale

erhält man durch Grenzprozess: es ist

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x} \longrightarrow 1 \text{ bei } x \rightarrow \infty,$$

also wird man setzen $\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = 1$.

Definition 12.5 :

i) Sei $I = [a, b)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $a < b \leq +\infty$.

$f : I \rightarrow \mathbb{C}$ sei Regelfunktion. Man setzt:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{s \nearrow b} \int_a^s f(x) dx, \text{ falls existent}$$

ii) entsprechend für $(a, b]$ mit $-\infty \leq a < b \in \mathbb{R}$.

iii) Sei $I := (a, b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$,

$f : I \rightarrow \mathbb{C}$ sei Regelfunktion: $\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

falls für ein $c \in (a, b)$ die beiden uneigentlichen Integrale rechts existieren.

Bem.:

1) Existenz für ein $c \iff$ Existenz für alle c

2) $\int_{-\infty}^{\infty} x \, dx$ existiert nicht, denn mit $c = 0$ ist

$$\int_0^t x \, dx = \frac{1}{2} t^2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty, \quad \int_s^0 x \, dx = -\frac{1}{2} s^2 \xrightarrow{s \rightarrow -\infty} -\infty$$

Andererseits $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t x \, dx = 0.$

Dies macht deutlich, dass man im Falle eines Grenzübergangs an beiden Grenzen die kompliziertere Definition iii) wählen muss. Hat man allerdings die Existenz von

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$$

sichergestellt, so kann man zur Berechnung die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(x) \, dx$$

wählen.

3) ein uneigentliches Integral heißt absolut konvergent $\iff \int_a^b |f(x)| \, dx$ existiert

Beispiele: i) $\boxed{\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} \text{ existiert } \iff s > 1}$

$$\text{denn: } \int_1^a \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1} (1 - a^{1-s}), \quad s \neq 1$$

$$\text{bzw. } = \log a, \quad s = 1$$

$a \rightarrow \infty$ ergibt Konvergenz der rechten Seite (gegen $\frac{1}{s-1}$) nur für $s > 1$.

ii) $\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{x^s} \text{ existiert } \iff s < 1}$

$$\text{denn:} \quad \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} -\log \alpha, & s = 1 \\ \frac{1}{1-s} (1 - \alpha^{1-s}), & s \neq 1 \end{cases}$$

iii) aus ii), i) folgt: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^s}$ existiert für kein $s \in \mathbb{R}$

iv)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \\ \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b \nearrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} -\arctan a + \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan b \\ &= \pi/2 + \pi/2 = \pi. \end{aligned}$$

Satz 12.11 : (Majorantenkriterium)

Seien $\mathbb{R} \ni a < b \leq \infty$, f, g seien Regelfunktionen auf $[a, b)$. Es gelte $|f| \leq g$.

Existiert dann $\int_a^b g(x) dx$ so auch $\int_a^b f(x) dx$.

Das Integral konvergiert sogar absolut.

Bem.: analoge Aussagen gelten für andere Grenzübergänge.

Beweis: Sei $F(x) := \int_a^x f(t) dt$, $x \in [a, b)$

$$\implies |F(x) - F(y)| = \left| \int_y^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_y^x |g(t)| dt \right|$$

für alle $x, y \in [a, b)$ bzw. mit $G(x) := \int_a^x |g(t)| dt$:

$$* \quad \left| F(x) - F(y) \right| \leq \left| G(x) - G(y) \right|.$$

Da $\lim_{x \uparrow b} G(x)$ existiert, genügt G dem Cauchy-Kriterium. Aus $*$ folgt das Cauchy-Kriterium für F , also die Beh. □

Als Anwendung beweisen wir

Satz 12.12 : (Grenzwertkriterium)

Seien f, g Regelfunktionen auf $[a, b]$ mit $g > 0$.
Existieren

$$\lim_{x \nearrow b} f(x)/g(x) \text{ und } \int_a^b g(x) dx,$$

so auch $\int_a^b f(x) dx$. (analog: andere Grenzübergänge)

Beweis:

$$\alpha := \lim_{x \uparrow b} f(x)/g(x) \implies \exists a' \in [a, b) \text{ mit}$$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \alpha \right| \leq 1 \quad \text{auf } [a', b) \implies$$

$$\left| f(x) \right| \leq (1 + |\alpha|)g(x) \quad \text{auf } [a', b) \xRightarrow{12.11}$$

$$\int_{a'}^b f(x) dx \text{ existiert.}$$

Dann existiert natürlich auch $\int_a^b f(x) dx$. □

Die Gamma-Funktion $\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$ ist wohldefiniert für $s > 0$ (s. Übungen).

Eigenschaften von $\Gamma(s)$:

$$(1) \quad \Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s), s > 0$$

$$(2) \quad \Gamma(1) = 1$$

$$(3) \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad , n \in \mathbb{N}$$

Beweis: Siehe Übungen.

Satz 12.13 : Uneigentliche Integrale und Reihen

Sei $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend und ≥ 0 . Dann existiert der Grenzwert

$$s := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx \right)$$

und erfüllt $0 \leq s \leq f(1)$.

D. h.: $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent $\iff \int_1^{\infty} f(x) dx$ existiert.

Beweis:

Es ist $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1)$. * Sei $a_n := \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx \implies$

$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x) dx \geq 0$ (s.o.), also $\{a_n\}$ wachsend mit $0 \leq a_n$,

denn $a_1 = f(1) - \int_1^2 f(x) dx \geq f(1) - f(1) = 0$, die Monotonie von $\{a_n\}$ ergibt $a_n \geq 0$.

Außerdem gilt: $a_n \leq f(1) - f(n+1)$:

$$\begin{aligned} a_n &= f(1) + \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx - f(n+1) \\ &= f(1) - f(n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} \underbrace{\left(f(k) - \int_{k-1}^k f(x) dx \right)}_{\leq 0 \text{ nach } * \text{ (2te Ungl.)}} \\ &\leq f(1) - f(n+1). \end{aligned}$$

Da $\{f(n)\}$ monoton fällt und ≥ 0 ist, existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$,

also: $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq f(1) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \leq f(1)$. □

Beispiele:

1) $f(x) = 1/x$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n 1/k - \log(n+1) \right) =: c$$

existiert. c heißt Euler - Mascheroni Konstante.

Es ist unbekannt, ob $c \in \mathbb{Q}$.

$$2) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} \quad \text{konvergent genau für} \quad s > 1 \iff$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad \text{konvergent genau für} \quad s > 1.$$