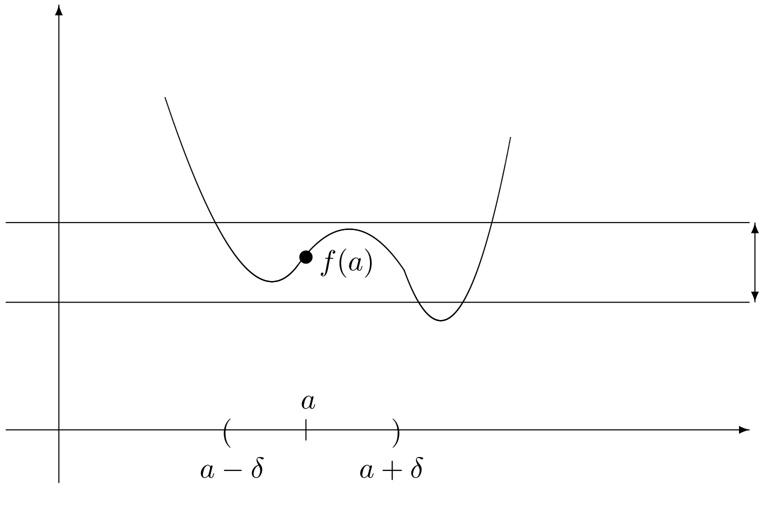
§9

Stetigkeit von Funktionen

Definition 9.1 *: Sei* $D \subset \mathbb{R}$ *oder* $\subset \mathbb{C}$ *und* $f: D \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$$f \quad \textit{stetig in} \quad a \in D \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \quad \textit{mit} \quad |f(z) - f(a)| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad z \in D, |z-a| < \delta.$$

$$f \quad \textit{stetig auf} \quad D \quad :\Longleftrightarrow \quad f \quad \textit{stetig in jedem Punkt} \quad a \in D.$$

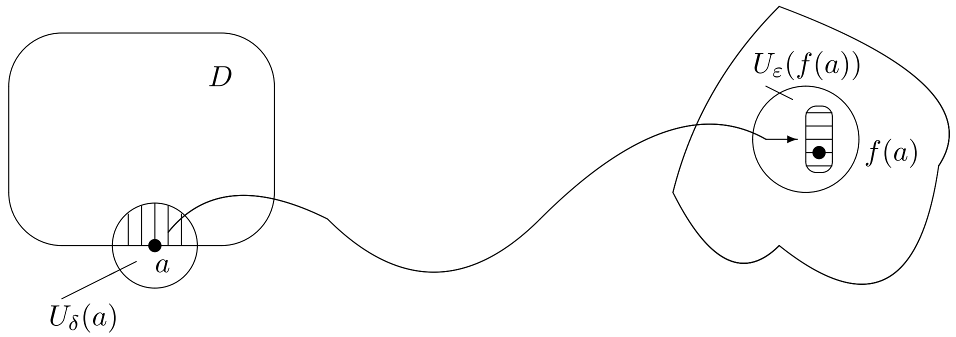


i) für $D \subset \mathbb{R},\ f: D \to \mathbb{R}$:

Über $(a-\delta, a+\delta)$ muß Graph (f) im ε- Streifen liegen

$$f(D \cap (a-\delta, a+\delta)) \ \subset\ (f(a)-\varepsilon,\ f(a)+\varepsilon)$$

ii) für $D \subset \mathbb{C},\ f : D \to \mathbb{C}$



iii), iv) $D \subset \mathbb{R},\ f : D \to \mathbb{C}$ bzw. $D \subset \mathbb{C},\ f : D \to \mathbb{R}$ analog

" Man gibt die zulässige Schwankung vor und muß dazu eine Umgebung $U_\delta(a)$ von a ausrechnen, so dass dort die Abweichung von $f(a)$ durch ε kontrolliert wird"

Satz 9.1 : *$f : D \to \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) Lipschitz $\Longrightarrow$ f stetig auf D*

Beweis: "$\delta = \varepsilon/L$"

Beispiele:

0) Satz 9.1 $\Longrightarrow$ Potenzreihen sind stetig auf dem Inneren des Konvergenzbereiches

1) $x \mapsto e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{cis} x$ stetig (Satz 9.1) auf $\mathbb{R}$

2) $\tan, \cot$ stetig auf ihrem Definitionsbereich (Rechenregeln, s.u)

3) Hyperbelfunktionen - " - (folgt aus Stetigkeit von e^x + Rechenregeln für stetige Funktionen)

4) $[0, \infty) \ni t \mapsto \sqrt{t}$ stetig an jeder Stelle $t_\circ \geq 0$:
Es ist $\sqrt{t} - \sqrt{t_\circ} \ = \ (t - t_\circ)\Big/(\sqrt{t} + \sqrt{t_\circ})$ (<u>wenn eine der Zahlen > 0</u>)

$\varepsilon > 0$ gegeben; $\delta := \sqrt{t_\circ} \cdot \varepsilon$, falls $t_\circ > 0$

$$\Longrightarrow \quad |\sqrt{t} - \sqrt{t_\circ}| \ \leq \ \sqrt{t_\circ} \cdot \varepsilon \, \tfrac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t_\circ}} \ \leq \ \varepsilon \quad \forall\, t \in (t_\circ - \delta, t_\circ + \delta)$$

ist $t_\circ = 0$, so gilt $|\sqrt{t}| < \varepsilon$ für alle $t \in [0, \varepsilon^2)$, also $\delta := \varepsilon^2$.

4) ist Spezialfall von 0), nochmals direkte Rechnung
$n \in \mathbb{N}$, $f(z) := z^n$, $z \in \mathbb{C}$, ist stetig:

Sei $z_\circ \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ gegeben. Fall $n = 1$: $\delta = \varepsilon$

$$n \geq 2: \quad f(z) - f(z_\circ) = (z - z_\circ)\,(z^{n-1} + z^{n-2}z_\circ + \ldots + z_\circ^{n-1})$$

$$\Longrightarrow \quad |f(z) - f(z_\circ)| \leq n \cdot \max\left\{|z|^{n-1}, |z|^{n-2} \cdot |z_\circ|, \ldots, |z_\circ|^{n-1}\right\}|z - z_\circ|$$

$$\leq n \cdot (1 + |z_\circ|)^{n-1}|z - z_\circ|,$$

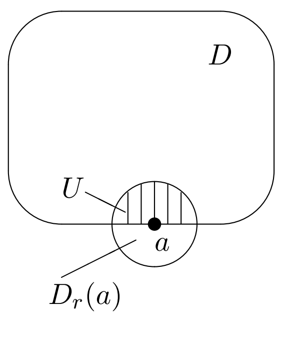
falls $|z - z_\circ| < 1$. Wählt man $\delta := \min\left\{1, \varepsilon \frac{1}{n} \cdot (1 + |z_\circ|)^{-n+1}\right\}$,
so folgt

$$|f(z) - f(z_\circ)| < \varepsilon \text{ für } |z - z_\circ| < \delta.$$

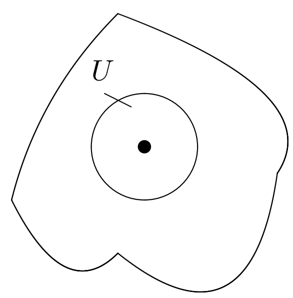
5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$ ist nirgends stetig,

da in jedem Intervall $(x_\circ - \delta, x_\circ + \delta)$ sowohl Punkte $\in \mathbb{Q}$ als auch $\notin \mathbb{Q}$ liegen.
Aber: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := x \cdot f(x)$, ist stetig in 0,
denn $|g(x) - g(\circ)| = |x \cdot f(x)| \leq |x|$.

Bemerkung: topologische Definition der Stetigkeit
$D \subset \mathbb{C}$, $a \in D$
$U \subset D$ heißt Umgebung von a in D (oder: relativ zu D) : $\Leftrightarrow$
$\exists r > 0$ mit $U \cap D(a) \subset D_r$, $D_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$



oder



Dann gilt für $f : D \to \mathbb{C}$:

f stetig in a $\Longleftrightarrow$ zu jeder Umgebung V von $f(a)$ in $\mathbb{C}$ gibt es eine Umgebung U von a in D mit $f(U) \subset V$.

Beweis: Übung! (das ist nur eine Umformulierung der Definition)

Fall $D \subset \mathbb{R}$: betrachte Intervalle $\subset \mathbb{R}$ □

Sehr praktisch ist

Satz 9.2 : *Folgenkriterium für Stetigkeit*

> $f : D \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *stetig in* $a \iff$
>
> *für jede Folge* $\{x_n\}$ *in* D *mit* $x_n \to a$ *gilt* $f(x_n) \to f(a)$.

f ist also unstetig in a, wenn man eine Folge $\{x_n\}$ angeben kann mit $x_n \longrightarrow a$, aber $f(x_n) \not\longrightarrow f(a)$.

Beweis: "$\Longrightarrow$" Sei $x_n \longrightarrow a$; $\varepsilon > 0$ gegeben; berechne dazu δ mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$, $|x-a| < \delta$. Für $n \geq N$ ist $|x_n - a| < \delta$, also $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$, so dass $f(x_n) \longrightarrow f(a)$.
"$\Longleftarrow$": indirekt! dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ wie folgt: zu jedem $\delta > 0$ existiert in $\{x \in D : |x - a| < \delta\}$ ein x_δ mit $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon$ betrachte $\delta := 1/n$, setze $z_n := x_{1/n} \implies z_n \longrightarrow a$, aber $f(z_n) \not\longrightarrow f(a)$. □

Satz 9.3 : *Rechenregeln für stetige Funktionen*

(i) $f, g : D \to \mathbb{R}, (\mathbb{C})$ *stetig in* $a \in D \implies$

$f + g,\ f \cdot g,\ f/g$ *(falls* $g(a) \neq 0$*)* *stetig in* a

(ii) $f : D \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *stetig in* $a, g : E \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *stetig in* $f(a)$, $f(D) \subset E \implies g \circ f$ *stetig in* a

Beweis: Folgenkriterium!

Folgerung: i) Polynome sind überall stetig (natürlich auch Spezialfall von "Potenzreihe").
ii) Rat. Funktionen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.
iii) $f : D \to \mathbb{C}$ stetig $\implies \overline{f}$, Re f, Im f, $|f|$ stetig

Bemerkung: Die Handlichkeit des Folgenkriteriums gegenüber der $\varepsilon - \delta$ Definition sieht man z.B. unschwer, wenn man die Stetigkeit von $x \mapsto \operatorname{cis}^3(x^2 + \sin x)$ im Punkt $x = 1$ nachprüfen muß.

Satz 9.4 *:* *Stetigkeit der Umkehrfunktion* *(s.Forster, p106)*

> *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *streng monoton und stetig* $\Longrightarrow$
>
> *die Bildmenge* $f([a, b])$ *ist ein Intervall mit Grenzen* $f(a), f(b)$ *und*
>
> $g = f^{-1} : f([a, b]) \to [a, b]$ *ist stetig*

Wir werden diesen Satz ableiten aus

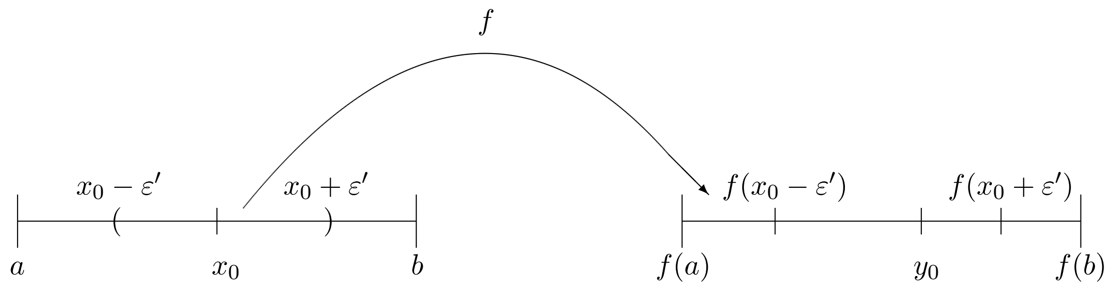
Satz 9.5 *:* *Zwischenwertsatz ZWS*

> $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig* $\Longrightarrow$ f *nimmt jeden Wert*
>
> *zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$ *an*

anders gesagt:

$$f\Big([a, b]\Big) \supset \begin{cases} [f(a), f(b)] & \text{für } f(a) \leq f(b) \\ [f(b), f(a)] & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis von Satz 9.4 mit 9.5: Die Aussage über $f\Big([a, b]\Big)$ folgt aus dem ZWS. Sei f streng wachsend $\Longrightarrow$ g streng wachsend



$y_\circ \in \Big[f(a), f(b)\Big] = f\Big([a,b]\Big)$ fixiert, $\varepsilon > 0$ gegeben, $x_\circ := g(y_\circ)$

Fall 1: $y_\circ$ innerer Punkt von $\Big[f(a), f(b)\Big]$

$\Longrightarrow$ (strenge Monotonie) $x_\circ \in (a,b)$

$\Longrightarrow \exists \varepsilon' \leq \varepsilon : \quad (x_\circ - \varepsilon', x_\circ + \varepsilon') \subset [a,b] \cap (x_\circ - \varepsilon, x_\circ + \varepsilon)$

f stetig und streng monoton $\Longrightarrow \Big(f(x_\circ - \varepsilon'), f(x_\circ + \varepsilon')\Big) \subset \Big[f(a), f(b)\Big]$

und $y_\circ \in \Big(f(x_\circ - \varepsilon'), f(x_\circ + \varepsilon')\Big)$

Also: $\exists\, \delta > 0$ mit $(y_\circ - \delta, y_\circ + \delta) \subset \Big(f(x_\circ - \varepsilon'), f(x_\circ + \varepsilon')\Big)$

Für $y \in (y_\circ - \delta, y_\circ + \delta)$ folgt: $g(y) \in (x_\circ - \varepsilon', x_\circ + \varepsilon') \Longrightarrow |g(y) - g(y_\circ)| < \varepsilon' \leq \varepsilon.$

Fall 2: $y_\circ$ Randpunkt $\rightsquigarrow$ analog mit einseitigen Intervallen. $\square$

Beweis von Satz 9.5: Sei o.E. $f(a) < f(b)$, $f(a) > f(b)$ behandelt man analog, für $f(a) = f(b)$ ist nichts zu zeigen. Sei $y \in \Big(f(a), f(b)\Big)$ z.z.: $\exists\, x \in [a,b] \quad f(x) = y$.
Sei $M := \Big\{x \in [a,b] \,:\, f(x) \leq y\Big\} \neq \emptyset$, nach oben beschränkt $\Longrightarrow \exists \ c := \sup M \in [a,b]$

wähle $\{x_n\} \in M$ mit $x_n \longrightarrow c \underset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} f(x_n) \longrightarrow f(c)$

$\Longrightarrow \quad f(c) \leq y.$

Gemäß $f(b) > y$ folgt $f(c) < f(b)$, also $c < b$. Daher kann man eine Folge $\{z_n\}$ in (c,b) finden mit $c = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. $z_n > c$ heißt : $z_n \notin M \Longrightarrow f(z_n) \geq y$, also $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) \geq y$, so dass $f(c) = y$ gilt. $\square$

Bemerkung: Man kann Satz 9.4 verschärfen
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ streng monoton, stetig in $x_\circ \in [a,b] \Longrightarrow f^{-1}$ stetig in $f(x_\circ)$
d.h. man braucht nicht Stetigkeit von f auf ganz $[a,b]$.

<u>Folgerungen aus dem Z.W.S:</u>

1) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f\Big([a,b]\Big) \subset [a,b] \Longrightarrow \exists$ <u>Fixpunkt</u> x, d.h. $f(x) = x$.

Beweis: $\varphi(x) := f(x) - x,\ \varphi(a) = f(a) - a \geq a - a = 0,$
$\varphi(b) = f(b) - b \leq b - b = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Big[\varphi(b), \varphi(a)\Big] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ZWS}}}{\subset} \varphi\Big([a,b]\Big)$

$\Longrightarrow \quad \exists\, x \in [a,b] : \varphi(x) = 0.$

2) "Existenz von Wurzeln": $n \in \mathbb{N}, \alpha > 0$ gegeben $\Longrightarrow$
$\exists\, \beta > 0 \qquad \beta^n = \alpha$

Beweis: $f(x) = x^n - \alpha,\ f(0) < 0,\ f(1+\alpha) \underset{\text{Bernoulli}}{>} 0$

$\Longrightarrow \quad \exists$ Nullstelle von f in $(0, 1+\alpha)$

3) "reelle Polynome ungeraden Grades haben mindestens eine reelle Nullstelle"

$$P(x) := x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \ldots + a_\circ, n \in \mathbb{N}_\circ, a_i \in \mathbb{R}$$

zeige (Übung): $P(r) > 0,\ P(-r) < 0$ für $r > 0$ "groß"

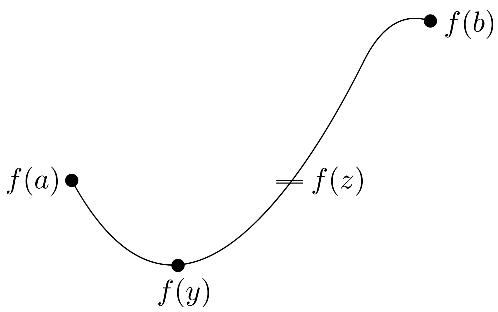
4) $\boxed{f \text{ stetig und injektiv auf } [a,b] \implies f \text{ streng monoton}}$

Beweis: Sei $f(a) < f(b)$, Fall $f(a) > f(b)$ analog.

Dann gilt: $* \quad f(a) < f(x) \qquad \forall\, x \in (a,b]$

Falls nicht, so finde $y \in (a,b]$ mit $f(a) > f(y)$ ("=" geht nicht wegen Inj. von f), also $f(a) \in \Big(f(y), f(b)\Big)$

Z.W.S $\Rightarrow$ $\underset{\text{Wspr!}}{\exists\, z \in (y,b)}$ mit $f(a) = f(z)$



Also gilt $*$. Seien $x_1 < x_2 \in [a,b]$. Angenommen

$$f(x_1) > f(x_2)$$

$\overset{*}{\Rightarrow} \quad f(a) \leq f(x_2) < f(x_1)$

Z.W.S. $\Rightarrow$ $\exists\ u \in [a, x_1]$ mit $f(u) = f(x_2)$, Wspr. zur Injektivität, da $u \leq x_1$, also $u \neq x_2$.

□

Auf die Stetigkeit kann man nicht verzichten.

Wir diskutieren jetzt, wie der Definitionsbereich einer stetigen Funktion $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ beschaffen sein muß, damit diese auf K Maximum und Minimum annimmt.

Definition 9.2 *:* *Kompakte Mengen*

Sei $K \subset \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$. *K heißt kompakt, wenn jede Folge $\{x_n\}$ in K eine Teilfolge hat, die konvergiert mit Limes in K.*

Beispiele: 1) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist kompakt nach Bolzano Weierstraß.
2) $(0,1)$ nicht kompakt: $\frac{1}{n} \in (0,1)$ hat keine Teilfolge mit Limes in $(0,1)$.

Bemerkungen: 1) $\boxed{K \text{ kompakt} \quad \Longrightarrow \quad K \text{ beschränkt}}$

falls nicht $\Rightarrow$ zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Element $x_n \in K$ mit $|x_n| \geq n$ $\{x_n\}$ ist unbeschränkt und kann deshalb keine konvergente Teilfolge haben.

2) Umkehrung falsch! Bspl.2)

Satz 9.6 *:* *Seien* $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *stetige Funktionen, man setzt*

$$K := \Big\{ z \in \mathbb{C} : \quad f_1(z) \leq 0, \ldots, f_m(z) \leq 0 \Big\}.$$

Dann gilt: K *beschränkt* $\Longrightarrow$ K *kompakt.*

Beweis: Aus Satz 6.6 (BW) folgt: jede Folge $\{z_n\}$ in K hat eine konvergente Teilfolge $\{z'_n\}$ also $\lim\limits_{n\to\infty} z'_n = z$ existiert. Z.Z.: $z \in K$
$z'_n \in K \iff f_\ell(z'_n) \leq 0, \ \ell = 1, \ldots, m, \ n \in \mathbb{N}$
f_ℓ stetig $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_\ell(z'_n) = f_\ell(z) \Longrightarrow f_\ell(z) \leq 0$, so dass $z \in K$. □

Beispiele: 1) Kreisscheibe $\overline{D_r(a)} := \{z \in \mathbb{C} : \; |z-a| \leq r\}$

$\left(\overline{D_r(a)} := \text{abgeschlossene Hülle von } D_r(a)\right)$ ist offenbar beschränkt. Mit $f(z) := |z-a| - r$ gilt

$$\overline{D_r(a)} = \{z \in \mathbb{C} : \; f(z) \leq 0\}.$$

2) Rechtecke $\{z \in \mathbb{C} : \alpha \leq \text{Re } z \leq \beta, \; a \leq \text{Im } z \leq b\} = [\alpha, \beta] \times [a, b]$ sind kompakt.

Satz 9.7 *:* *Operationen mit kompakten Mengen*

(i) endliche Vereinigung: $K_1, \ldots, K_m$ *kompakt* $\Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ *kompakt*

(ii) beliebige Durchschnitte: K_α *kompakt,* $\alpha \in A \Longrightarrow \bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$ *kompakt*

Beweis: (i) $\{z_n\}$ Folge in $\bigcup_{i=1}^{m} K_i \Longrightarrow \exists \, i_\circ : \quad \sharp \{n : z_n \in K_{i_\circ}\} = \infty$

$\Longrightarrow$ man kann T.F. $\{z_n'\}$ von $\{z_n\}$ in $K_{i_\circ}$ wählen; benutze dann die Kompaktheit von $K_{i_\circ}$: $\exists \, \{z_n''\} \subset \{z_n'\}$ und $z \in K_{i_\circ}$ mit $z_n'' \to z$.
(ii) $\{z_n\}$ Folge in $K = \bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$.
fixiere ein $\alpha \Longrightarrow \{z_n\}$ Folge in K_α, K_α kompakt, also $\exists \, z \in K_\alpha$ und $\{z_n'\} \subset \{z_n\}$ mit $z_n' \longrightarrow z$. Aber: $\{z_n'\}$ ist Folge in jedem K_β, K_β kompakt $\Longrightarrow$

$$\exists \, y \in K_\beta, \{z_n''\} \subset \{z_n'\} \text{ mit } z_n'' \longrightarrow y.$$

Da aber $\{z_n'\}$ bereits konvergiert, folgt $y = z$, d.h. $z \in K_\beta \; \forall \, \beta$, und wir haben gezeigt: $z_n' \longrightarrow z$ mit $z \in \bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$. □

Satz 9.8 *:* $\boxed{\textit{Sei } K \textit{ kompakt und } f : K \longrightarrow \mathbb{C} \textit{ stetig. Dann ist } f(K) \textit{ kompakt.}}$

Beweis: Sei $\{y_k\} = \{f(x_k)\}$ Folge in $f(K)$, $x_k \in K$. Wähle T.F. $\{x_n'\}$ von $\{x_k\}$ mit $x_k' \longrightarrow x \in K$. f stetig $\Longrightarrow \{y_k'\} := \{f(x_k')\}$ konvergiert gegen $f(x) \in f(K)$. □

Korollar: "Satz vom Maximum"

$$\boxed{\begin{array}{l} f \; : K \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}, \quad K \subset \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ kompakt} \Longrightarrow \\[1ex] \exists \; x_1, x_2 \in K \text{ mit } f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \text{ für alle } x \in K \end{array}}$$

M.a.W.: die Bildmenge $f(K)$ hat Max. und Minimum!

Beweis: Satz 9.7 $\Longrightarrow f(K)$ kompakt $\Longrightarrow f(K)$ beschränkt; Satz 3.7 (Supremumseigenschaft): $\sup f(K), \inf f(K)$ existieren. Wähle $\{x_n\} \subset K$ mit $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup f(K)$ (existiert nach Def. von sup) und benutze Kompaktheit von $f(K)$, um $\sup f(K) \in f(K)$ zu sehen (alternativ: Stetigkeit von f + Kompaktheit von K). Analog für inf. □

Wir haben gezeigt: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv $\Longrightarrow$

f streng monoton und stetig $\Longrightarrow$

f^{-1} ist stetig

Diese Aussage läßt sich wie folgt verallgemeinern.

Satz 9.9 : *(Stetigkeit der Umkehrfunktion)*

Sei K kompakt $\subset \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig und injektiv. Dann ist $f^{-1} : f(K) \to K$ stetig.

Beweis: Sei $f = f^{-1}$ und $\{z_n\}$ eine Folge in $f(K)$ mit $z_n \longrightarrow z$.
Z.z.: $g(z_n) \longrightarrow g(z)$ $\quad *$
$x_n := g(z_n)$ ist Folge in K, K kompakt $\Longrightarrow x'_n \to x$ für ein $x \in K$, $\{x'_n\} \subset \{x_n\}$. f stetig $\Longrightarrow f(x'_n) \to f(x)$. Es gilt: $f(x'_n) = z'_n$, also: $z'_n \longrightarrow f(x)$. Da wir $z_n \to z$ voraussetzen, folgt $z = f(x)$ bzw. $x = g(z)$. Wir haben also: $g(z'_n) \longrightarrow g(z)$. Somit gilt $*$ zumindest für eine T.F. Jetzt benutzen wir ein allgemeines Prinzip: Angenommen $g(z_n) \not\longrightarrow g(z)$. Dann gibt es eine T.F. $\{\hat{z}_n\}$ von $\{z_n\}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $\left|g(\hat{z}_n) - g(z)\right| \geq \varepsilon \quad \forall n$
betrachte wie oben $\hat{x}_n := g(\hat{z}_n)$ und zeige mit den selben Rechnungen
$\exists$ T.F. $\{\hat{\hat{z}}_n\}$ mit $g(\hat{\hat{z}}_n) \longrightarrow g(z)$, Wspr.!

allg. Prinzip:

$$\left.\begin{array}{l} \{a_n\} \text{ sei eine Folge mit} \\ \bullet \text{ jede T.F. hat eine konvergente T.F.} \\ \bullet \text{ die Limiten sind gleich} \end{array}\right\} \Longrightarrow \{a_n\} \text{ konvergent}$$ □

Anwendung des Satzes vom Maximum:

Satz 9.10 : *Fundamentalsatz der Algebra*
Seien $n \in \mathbb{N}, a_\circ, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0.$
Dann hat $P(z) = \sum\limits_{\ell=0}^{n} a_\ell \, z^\ell$ *eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$.

Korollar: Ist $P(z)$ ein komplexes Polynom vom Grad $n \geq 1$, so gibt es $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ (nicht notwendig alle verschieden) und $a \in \mathbb{C}$ mit $P(z) = a \cdot (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$ auf $\mathbb{C}$.

Beweis: das Korollar folgt induktiv durch schrittweise Anwendung des Satzes

a) Sei o.E. $a_n = 1$, also $P(z) = z^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \, z^k$

Beh.: $\exists \, z_\circ \in \mathbb{C}: \quad |P(z_\circ)| \leq |P(z)| \quad \forall \, z \in \mathbb{C}$

Bew.: Es ist

$$|P(z)| \geq |z|^n - |z|^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = |z|^{n-1} \cdot \Big(|z| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \Big)$$

für $|z| \geq 1$. Außerdem sieht man:

$$\exists \, R \geq 1: \quad |P(z)| \geq 1 + |P(0)| \quad \text{für alle } |z| \geq R.$$

Sei $K := \Big\{ z \in \mathbb{C}: \ |z| \leq R \Big\}$. K kompakt $\Rightarrow \exists \, z_\circ \in K: \quad |P(z_\circ)| \leq |P(z)| \quad \forall \, z \in K$

Insbesondere ist auch $|P(z_\circ)| \leq |P(0)|$, d.h. $|P(z_\circ)| \leq |P(w)|$ für $|w| \geq R$, so dass $z_\circ$ die gesuchte Minimalstelle von $|P|$ auf $\mathbb{C}$ ist.

b) Wir zeigen indirekt: $P(z_\circ) = 0$.

Sei also $P(z_\circ) \neq 0$. Dann können wir definieren:

$$q(w) := P(z_\circ + w) \Big/ P(z_\circ) \quad \Longrightarrow \quad q(0) = 1.$$

$n = 1$: $q(w) = 1 + b \cdot w$ mit Koeff. $b \neq 0$ (Polynom 1^{ten} Grades). Wähle $w_\circ := -\frac{1}{b} \Longrightarrow 0 = q(w_\circ) = P(z_\circ)^{-1} P(z_\circ + w_\circ) \Longrightarrow P(z_\circ + w_\circ) = 0$ und damit $0 = |P(z_\circ + w_\circ)| < |P(z_\circ)|$, was der Minimalität widerspricht.

$n \geq 2$: Dann hat q die Form

$$q(w) = 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot w^k, \ b_n = P(z_\circ)^{-1}.$$

Sei $m \in \{1, \dots, n\}$ der <u>kleinste</u> Index mit $b := b_m \neq 0 \Longrightarrow$

$$q(w) = 1 + b \cdot w^m + \sum_{k=m+1}^{n} b_k w^k.$$

Wir konstruieren ein $\beta \in \mathbb{C}$ mit $\beta^m = -1/b$ $\Big[a := -1/b \Longrightarrow a/|a| \in S^1 \Longrightarrow$ $\exists\, x \in \mathbb{R} : e^{ix} = a/|a|,$ also: $a = |a| \cdot e^{ix}$; $\beta := |a|^{1/m} \cdot e^{ix/m}\Big]$.

Dann ist

$$q(\beta w) = 1 - w^m + w^{m+1} \cdot \underbrace{R(w)}_{\substack{\text{Restpolynom geeignet definiert} \\ R(w) = \sum_{k=m+1}^{n} b_k (\beta w)^k}}$$

Wähle $c \geq \max\{1, \max_{|w| \leq 1} |R(w)|\}$.

$\Longrightarrow \quad |R(w)| \leq c \quad \forall\, |w| \leq 1$

$\Longrightarrow \quad |w^{m+1} \cdot R(w)| \leq c \cdot |w|^{m+1} < |w|^m \quad \forall\, |w| < 1/c, w \neq 0$

(beachte $\frac{1}{c} \leq 1$)

Sei $x_\circ \in (0, \frac{1}{c})$ beliebig $\Longrightarrow$

$$\Big|q(\beta x_\circ)\Big| = \Big|1 - x_\circ^m + x_\circ^{m+1} R(x_\circ)\Big| < 1 - x_\circ^m + x_\circ^m = 1.$$

D.h.:

$$\Big|P(z_\circ + \beta x_\circ) \Big/ P(z_\circ)\Big| < 1 \iff |P(z_\circ + \beta x_\circ)| < |P(z_\circ)|,$$

im Wspr. zur Minimalität von $z_\circ$.

$\square$

Grenzwerte von Funktionen:

Sei $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Die Frage nach Stetigkeit von f in $x = 1$ stellt sich hier nicht, da $1 \notin D(f)$.

Für jede Folge $x_n \in D(f),\ x_n \to 1$ gilt:

$$f(x_n) = (x_n^2 - 1)\Big/(x_n - 1) \ = \ x_n + 1 \longrightarrow 2,$$

d.h. $\underline{f \text{ hat einen Grenzwert bei } x \to 1}$, und wie man sofort sieht, ist

$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), x \neq 1 \\ 2, \quad x = 1 \end{cases}$, eine stetige Fortsetzung von f.

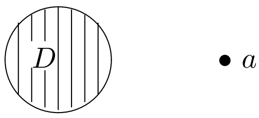
> Fortsetzungsproblem (allgemein): $D \subset \mathbb{C},\ f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig,
>
> $a \notin D$. Gibt es eine stetige Funktion $\tilde{f} : D \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$
>
> mit $\tilde{f} = f$ auf D?

Hinweis: i) Wenn es eine Folge $\{z_n\}$ in D gibt mit $z_n \to a$, so muß es im Falle einer positiven Antwort gelten:

> $\alpha := \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ existiert und hängt nicht von der speziellen Wahl der Folge $\{z_n\}$ ab.

$\tilde{f}(a) := \alpha$ leistet dann das Gewünschte.

ii) Gibt es keine Folge $\{z_n\}$ in D mit $z_n \to a$, so kann man $\tilde{f}(a)$ beliebig wählen und erhält eine stetige Fortsetzung.



ii) ist offenbar ein Trivialfall! Man betrachtet Punkte a wie folgt

Definition 9.3 : *Sei $D \subset \mathbb{C}$. $a \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt von D falls eine der drei äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

1) $\exists$ Folge $\{z_n\}$ in D mit $z_n \neq a$ und $z_n \longrightarrow a$

2) in jeder Umgebung W von a liegen unendlich viele Elemente von D

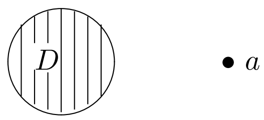
3) in jeder Umgebung W von a gibt es einen Punkt $z \neq a$

(Beweis von 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1) als Übung)

Bemerkungen:

1) a kann - muß aber nicht - zu D gehören.

2) $D = (a,b), [a,b] \Longrightarrow$ alle Punkte sind H.P.

3) 

a kein H.P.!

4) $D := \{z_1, \dots, z_n\}$ hat keine H.P.!

5) $\boxed{\text{Fortsetzungsproblem nur interessant, wenn } a \text{ H.P. von } D.}$

6) $\mathbb{R} =$ Menge aller H.P. von $\mathbb{Q}$

Definition 9.4 *:* *Grenzwerte von Funktionen*

Sei $f : D \to \mathbb{C}$, a *H.P. von* D. $b \in \mathbb{C}$ *heißt Grenzwert von* f *an der Stelle* a*, i.Z.* $b = \lim\limits_{z\to a} f(z)$*, wenn für jede Folge* $\{z_n\} \subset D$ *mit* $z_n \neq a$ *und* $z_n \longrightarrow a$ *gilt:* $b = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$.

Beispiele: $D = (-1,1) - \{0\}$, 0 ist H.P. von D

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$, $\lim\limits_{x\to 0}(\sin \frac{1}{x})$ existieren nicht

(Begründung durch Angabe geeigneter Folgen, z.B.

$$1/n\Big/|1/n| \to 1, \quad -1/n\Big/|-1/n| \to -1)$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} |x|^\alpha = 0,\ \alpha > 0$

3) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$ (da $|\sin| \leq 1$)

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}(e^x - 1) = 1$

(Satz 8.3 $\Rightarrow$
$$\begin{array}{lll} 1 \leq \frac{1}{x}(e^x-1) \leq \frac{1}{1-x} & \text{für} & x \in (0,1) \\ 1 \geq \frac{1}{x}(e^x-1) \geq \frac{1}{1-x} & \text{für} & x \in (-1,0) \end{array}$$

Es gilt offenbar:

Satz 9.11 : *Sei $a \in \mathbb{C}$ H.P. von D und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion.*
Dann gilt:

$$b := \lim_{z\to a} f(z) \text{ existiert } \Longleftrightarrow$$

$\exists$ *eine Fortsetzung* $g : D \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ *von f, die in a stetig ist.*

Beweis: klar!

Bemerkung: f wird nicht als stetig auf D vorausgesetzt!

Satz 9.12 : *$\varepsilon - \delta$ Charakterisierung von Grenzwerten*

Sei $a \in \mathbb{C}$ *H.P. von D und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion.*
$\lim\limits_{z\to a} f(z) = b \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ *mit* $|f(z) - b| < \varepsilon$ *für alle* $z \in D$, $z \neq a, |z - a| < \delta$.

Beweis: Satz 9.11 + "$\varepsilon - \delta$ Beschreibung der Stetigkeit". □

Wichtig ist folgendes Kriterium, da man hier den Grenzwert nicht kennen muß.

Satz 9.13 : *Cauchy-Kriterium*

$f : D \to \mathbb{C}$, *a H.P. von D.* $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ *existiert* $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |f(z) - f(w)| < \varepsilon$ *für alle* $z, w \in D - \{a\}$, $|w - a|, |z - a| < \delta$.

Beweis: "$\Longrightarrow$" Satz 9.12 + Dreiecksungleichung

"$\Longleftarrow$" Sei $\{z_n\} \subset D$, $z_n \neq 0$, $z_n \to a$. Nach Voraussetzung ist dann $|f(z_n) - f(z_m)| < \varepsilon$, wenn $|z_n - z_m| < \delta$, wobei die letzte Bed. sicher für $n, m \geq N$ erfüllt ist. Also: $\{f(z_n)\}$ C.F.
$\Longrightarrow \quad b = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ exist.
Sei $\{z'_n\}$ andere Folge in $D - \{a\}$ mit $z_n \to a \underset{\text{wie oben}}{\Longrightarrow} b' := \lim\limits_{n\to\infty} f(z'_n)$ exist.

Nun ist

$$|b - b'| \quad \leq \quad \underbrace{\underbrace{|f(z_n) - b|}_{<\varepsilon/3} \quad + \quad \underbrace{|f(z'_n) - b'|}_{<\varepsilon/3}}_{\text{für } n\geq N} \quad + \quad |f(z_n) - f(z'_n)|$$

Nach Vor. exist. $\delta > 0$ mit $|f(z) - f(w)| < \varepsilon/3 \quad \forall\, |z - w| < \delta, z, w \in D - \{a\}$

Für $n \geq M_\delta$ ist offenbar $|z_n - z'_n| < \delta$, insgesamt

$$|b - b'| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad b = b', \text{ da } \varepsilon \text{ beliebig.}$$

□

Wir fassen nun alle Häufungspunkte mit D zusammen:

Definition 9.5 *: Sei $D \subset \mathbb{C}$.* $\overbrace{\underline{\textit{Abgeschlossene Hülle von } D}}^{\textit{Abschluß}}$ $:=$

$$\{z \in \mathbb{C} : \; z \in D \quad \textit{oder} \quad z \text{ H.P. von } D\} = D \cup \{z : z \text{ H.P. von } D\}$$

Schreibweise: $\overline{D}$

In Worten: $\overline{D}$ = Limiten aller konvergenten Folgen mit Gliedern in D

Beispiele: 1) $\overline{(a,b)} = [a,b], \quad \overline{[a,b]} = [a,b]$

2) $D = \Big\{z \in \mathbb{C} : \quad |z - a| < r\} \Longrightarrow \overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : \quad |z - a| \leq r\Big\}$

Bemerkung: $D \subset \mathbb{C}$ <u>abgeschlossen</u> $:\Longleftrightarrow \overline{D} = D.$

<u>Wir suchen nun ein Kriterium dafür, wann sich eine stetige Funktion</u> $f : D \to \mathbb{R}$ <u>stetig auf</u> $\overline{D}$ <u>fortsetzen läßt</u>.

Definition 9.6 *:* $f : D \to \mathbb{C}$ *heißt <u>gleichmäßig stetig</u> auf D* $:\Longleftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon < 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad |f(z) - f(w)| < \varepsilon \quad$ *für alle* $\quad z, w \in D, |z - w| < \delta.$

Bemerkungen:

1) Das "δ" ist unabhängig von z, w, also gleichmäßig bzgl. D.
2) $\boxed{f : D \to \mathbb{C} \quad \text{Lipschitz} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ glm. stetig auf } D}$

3) $f(x) = 1/x$ ist nicht glm. stetig auf $(0, \infty)$:

Z.Z.: $\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x, y$ mit $|x - y| < \delta$ aber $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

Wähle $\varepsilon = 1$. Setze $y = \delta$, $x = \frac{\delta}{2} \Longrightarrow |x - y| < \delta$ und $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = 2 \cdot \delta^{-1} - \delta^{-1} = \delta^{-1} > 1$, wenn $\delta \in (0, 1)$.

Ist $\delta \geq 1$, so setzt man $y = 1, x = \frac{1}{2} (\Rightarrow |x - y| = \frac{1}{2} < \delta)$.

4) offenbar: $\boxed{f \text{ glm. stetig auf } D \Longrightarrow f \text{ stetig an jeder Stelle } a \in D}$

Satz 9.14 : *Ist $f : D \to \mathbb{C}$ glm. stetig, so gibt es genau eine stetige Fortsetzung $\overline{f} : \overline{D} \to \mathbb{C}$: von f auf $\overline{D}$.*

Beweis: Übung

1) Eindeutigkeit: sei $\overline{f}_i$ eine Fortsetzung, $i = 1, 2$; $z_\circ \in \overline{D} - D$; wähle $z_n \in D$ mit $z_n \to z_\circ \underset{\overline{f}_i \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$

$\overline{f}_i(z_\circ) = \lim\limits_{n \to \infty} f(z_n). \quad \Longrightarrow \quad \overline{f}_1(z_\circ) = \overline{f}_2(z_\circ)$

2) Existenz: aus der Def. von glm. stetig folgt, dass die Cauchy-Bed. aus Satz 9.13 in jedem H.P. a von D erfüllt ist $\Longrightarrow \lim\limits_{z \to a} f(z) \;\exists$ in allen H.P. von D.

Da die Punkte aus $\overline{D} - D$ H.P. sind, können wir definieren:

$$\overline{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ \lim\limits_{x \to z} f(x), & z \in \overline{D} - D \end{cases}$$

3) zeige: $\overline{f}$ ist sogar glm. stetig auf $\overline{D}$

□

Satz 9.14 beantwortet also das Problem der stetigen Fortsetzbarkeit in sehr allgemeiner Weise. Wir schließen mit einem Satz, der die Bedeutung der Kompaktheit nochmals deutlich macht.

Satz 9.15 : *$f : D \to \mathbb{C}$ sei stetig und D kompakt $\Longrightarrow f$ glm. stetig.*

Beweis: Übung (indirekt!)

<u>Ergänzung</u>: Eine andere Charakterisierung kompakter Mengen

Satz 9.16 *: $D \subset \mathbb{C}$ kompakt $\Longleftrightarrow$ D beschränkt und abgeschlossen ($\overline{D} = D$)*

Beweis: "$\Longrightarrow$" Beschränktheit wurde bewiesen; sei a H.P. von D. Z.Z.: $a \in D$ Wähle $z_n \neq a$, $z_n \in D$ $z_n \longrightarrow a$. D kpt. $\Rightarrow$ $\exists$ <u>in D</u> konvergente T.F. $\{z'_n\} \subset \{z_n\} \Longrightarrow a = \lim\limits_{n\to\infty} z'_n \in D$.

"$\Longleftarrow$" Sei $\{z_n\}$ Folge in D; $\{z_n\}$ beschränkt $\underset{\text{B.W.}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ konvergente Teilfolge $\{z'_n\}$; $a = \lim\limits_{n\to\infty} z'_n$ gehört zu $\overline{D}$ also zu D, da $\overline{D} = D$ nach Vor. $\square$