UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dominik Schillo, M.Sc.

Übungen zur Vorlesung
Minimalflächen
Wintersemester 2018/19

Blatt 1 **Besprechung:** 09.11.2018

Übung 1.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offen, beschränkte Menge mit glattem Rand. Man beweise mit dem Satz von Gauß:

$$\int_\Omega \Delta u \, \eta \, \mathrm{d}\lambda = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \eta \, \mathrm{d}\lambda$$

für alle $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und $\eta \in C_c^1(\Omega)$, wobei λ das Lebesguemaß und $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{ii}$ den Laplaceoperator bezeichnet.

Lösung 1.
Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und $\eta \in C_c^1(\Omega)$. Dann gilt mit dem Gaußschen Integralsatz bzw. der ersten greenschen Identität

$$\int_\Omega \Delta u \, \eta \, \mathrm{d}\lambda = \int_{\partial\Omega} \eta \nabla u \cdot n \, \mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \eta \, \mathrm{d}\lambda = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \eta \, \mathrm{d}\lambda,$$

da $\eta|_{\partial\Omega} \equiv 0$.

Übung 2.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offen, beschränkte Menge mit glattem Rand. Definiere

$$J \colon C^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \ f \mapsto \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Seien weiterhin $f \in C^1(\Omega)$ und $\psi \in C_c^1(\Omega)$ so, dass mit

$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \varepsilon \mapsto J(f + \varepsilon\psi)$$

die Bedingung

$$g'(0) = 0$$

gilt. Zeigen Sie:

(i) $\int_\Omega (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \cdot \nabla \psi \, \mathrm{d}\lambda = 0$,

(ii) $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0$.

(*Hinweis : Benutzen Sie den Satz von Gauß.*)

Lösung 2.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leftarrow \frac{1}{\varepsilon}(J(f+\varepsilon\psi) - J(f)) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \sqrt{1+|\nabla f|^2} - \sqrt{1+|\nabla f + \varepsilon\nabla\psi|^2}\,\mathrm{d}\lambda \\
&= 2\int_\Omega \frac{\nabla f\cdot\nabla\psi}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}+\sqrt{1+|\nabla f+\varepsilon\nabla\psi|^2}}\,\mathrm{d}\lambda + \int_\Omega \frac{\varepsilon|\nabla\psi|^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}+\sqrt{1+|\nabla f+\varepsilon\nabla\psi|^2}}\,\mathrm{d}\lambda \\
&\to \int_\Omega \frac{\nabla f\cdot\nabla\psi}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\,\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

für $\varepsilon \to 0$, wobei die Voraussetzungen zur Anwendung der Satzes über die Stetigkeit von Parameterintegralen gegeben ist.

(ii) Der Satz von Gauß (partielle Integration) liefert

$$\int_\Omega \operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)\psi\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\partial\Omega}\psi\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)\cdot n\,\mathrm{d}S - \int_\Omega\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}\lambda = 0,$$

da $\psi|_{\partial\Omega} \equiv 0$ und Teil (i). Da dies für alle $\psi \in C_c^1(\Omega)$ gilt und $C_c^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ dicht ist, folgt

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0.$$

Übung 3.

Finden Sie alle Lösungen der Minimalflächengleichung

$$\left(1+(\partial_2 f)^2\right)\partial_{11}f - \partial_1 f\partial_2 f\partial_{12}f + \left(1+(\partial_1 f)^2\right)\partial_{22}f = 0,$$

die die Gestalt $f(u,v) = \varphi(u)+\psi(v)$ haben und $f(0,0) = 0$ sowie $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$ erfüllen. Die Fläche heißt *erste Scherk-Fläche*. Zeigen Sie dazu zunächst, dass φ' und ψ' Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\lambda' = c(1+\lambda^2) \quad (c\in\mathbb{R})$$

sind.

Lösung 3.

Die Gleichung reduziert sich zu

$$(1+(\psi'(v))^2)\varphi''(u) + (1+(\varphi'(u))^2)\psi''(v) = 0,$$

sodass

$$\frac{\varphi''(u)}{1+(\varphi'(u))^2} = -\frac{\psi''(v)}{1+(\psi'(v))^2}.$$

Da die linke Seite unabhängig ist von u und die rechte Seite unabhängig ist von v, sind beide konstant zu einer Konstanten c. Damit folgt

$$\varphi''(u) = c(1+(\varphi'(u))^2) \quad \text{and} \quad \psi''(v) = -c(1+(\psi'(v))^2).$$

Damit ist die Zwischenbehauptung gezeigt. Die Lösung der Differentialgleichung

$$\lambda' = c(1+\lambda^2) \quad (c\in\mathbb{R})$$

mit $\lambda(0)=0$ ist
$$\lambda(x)=\tan(cx).$$
Damit erhalten wir
$$\varphi(u)=-\frac{1}{c}\log(\cos(cu)) \quad \text{and} \quad \psi(v)=\frac{1}{c}\log(\cos(cv)),$$
d.h.
$$f(u,v)=\frac{1}{c}\log\left(\frac{\cos(cv)}{\cos(cu)}\right)$$
mit $(u,v)\in\Omega=\big\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : \big|u+k\frac{\pi}{c}\big|<\frac{\pi}{2c}, \big|v+l\frac{\pi}{c}\big|<\frac{\pi}{2c}$ für $k,l\in\mathbb{Z}$ mit $k\equiv l \pmod 2\big\}$.