UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dominik Schillo, M.Sc.

Übungen zur Vorlesung
Minimalflächen
Wintersemester 2018/19

Blatt 2 **Besprechung:** 16.11.2018

Übung 1.
Betrachten Sie Minimalflächen mit
$$\partial_1^2 f \equiv 0.$$
Lösungen der Minimalflächengleichung dieser Gestalt haben die Form $f(u, v) = u\varphi(v) + \psi(v)$. Leiten Sie daraus die Gleichung
$$\left(\frac{\varphi'}{\varphi^2+1}\right)' \equiv 0$$
her und bestimmen Sie damit die allgemeine Darstellung solcher Minimalflächen.

Lösung 1.
Die Minimalflächengleichung reduziert sich zu
$$\begin{aligned}0 &= -2\varphi(v)(u\varphi'(v)+\psi'(v))\varphi'(v) + (1+(\varphi(v))^2)(u\varphi''(v)+\psi''(v))\\ &= u(-2\varphi(v)(\varphi'(v))^2 + (1+(\varphi(v))^2)\varphi''(v)) - 2\varphi(v)\varphi'(v)\psi'(v) + (1+(\varphi(v))^2)\psi''(v)\\ &= (1+(\varphi(v))^2)^2\left(u\left(\frac{\varphi'}{\varphi^2+1}\right)'(v) + \left(\frac{\psi'}{\varphi^2+1}\right)'(v)\right)\end{aligned}$$
bzw.
$$u\left(\frac{\varphi'}{\varphi^2+1}\right)'(v) = -\left(\frac{\psi'}{\varphi^2+1}\right)'(v)$$
für alle u, v. Für $u = 0$ folgt dann
$$\left(\frac{\psi'}{\varphi^2+1}\right)' \equiv 0$$
und mit $u \neq 0$ schließlich
$$\left(\frac{\varphi'}{\varphi^2+1}\right)' \equiv 0.$$
Also gibt es ein $c_1 \in \mathbb{R}$, sodass
$$\frac{\varphi'}{1+\varphi^2} = c_1,$$
sodass
$$\varphi(t) = \tan(c_2 + c_1 t)$$
für alle t und einer Konstanten c_2. Außerdem exisitert $c_3 \in \mathbb{R}$, sodass
$$\frac{\psi'}{1+\varphi^2} = c_3,$$
also
$$\psi(t) = \frac{c_3}{c_1}\tan(c_2 + c_1 t) + c_4$$

für alle t und einer Konstante c_4. Insgesamt erhalten wir

$$f(u,v) = \left(u + \frac{c_3}{c_1}\right) \tan(c_2 + c_1 t) + c_4$$

für alle $(u,v) \in \Omega$.

Übung 2.
Seien S eine Fläche, $p \in S$ und F eine lokale Parametrisierung von S bei p mit $F(u_0) = p$. Zeigen Sie:

(i) Zeigen Sie, dass
$$T_pS = DF(u_0)(\mathbb{R}^2) = \operatorname{Bild}(DF(u_0)).$$

(ii) T_pS ist ein zweidimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$, genannt Tangentialebene an die Fläche in p.

(iii) T_pS wird aufgespannt von den beiden linear unabhängigen Vektoren $\partial_1 F(u_0)$ und $\partial_2 F(u_0)$.

Lösung 2.

(i) Sei zunächst $x \in DF(u_0)(\mathbb{R}^2)$. Dann existiert ein $y \in \mathbb{R}^2$, sodass
$$x = DF(u_0)(y).$$
Da U offen ist (vgl. Definition lokale Parametrisierung), existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $u_0 + ty \in U$ für alle $|t| < \varepsilon$. Definiere
$$r\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \cap V,\ t \mapsto F(u_0 + ty).$$
Dann gilt
$$\begin{aligned} r(0) &= f(u_0) \\ r'(0) &= DF(u_0)(y) = x, \end{aligned}$$
sodass $x \in T_pS$.
Sei umgekehrt $x \in T_pS$. Dann gibt es einen glatten Weg $r\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ mit $r(0) = p$ und $r'(0) = x$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\operatorname{Bild}(r) \subset S \cap V$. Dann ist
$$\tilde{r} = F^{-1} \circ r\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$$
eine glatte Funktion. Setze $y = \tilde{r}'(0) \in \mathbb{R}^2$. Es folgt
$$(F \circ \tilde{r})'(0) = r'(0) = x$$
und
$$(F \circ \tilde{r})'(0) = DF(\tilde{r}(0))(\tilde{r}'(0)) = DF(F^{-1}(r(0)))(\tilde{r}'(0)) = DF(F^{-1}(p))(\tilde{r}'(0)) = DF(u_0)(y),$$
sodass
$$x = DF(u_0)(y).$$
Damit ist $x \in \operatorname{Bild}(DF(u_0))$.

(ii) Dies ergibt sich aus (i) und der Tatsache, dass $DF(u_0)$ Rang zwei besitzt.

(iii) Dies ergibt sich aus (i), (ii) und der Tatsache, dass die Spalten von $DF(u_0)$ die entsprechenden Vektoren sind.

Übung 3.
Sei $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung von $S = F(\Omega)$. Man setzt für $(u,v) \in \Omega$

$$N(u,v) = \frac{\partial_1 F \times \partial_2 F}{|\partial_1 F \times \partial_2 F|}(u,v) \quad \text{und} \quad F_\varepsilon(u,v) = F(u,v) + \varepsilon\varphi(u,v)N(u,v)$$

für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie: Für $|\varepsilon| \ll 1$ ist F_ε eine reguläre Parametrisierung von $S_\varepsilon = F_\varepsilon(\Omega)$.

Lösung 3.
Es gilt

$$\partial_i X^\varepsilon = \partial_i X + \varepsilon(\partial_1 \varphi N + \varphi \partial_i N) = \partial_i X + \varepsilon R_i$$

mit $R_i = \partial_1 \varphi N + \varphi \partial_i N \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^3)$ für $i = 1, 2$. Weiterhin sehen wir, dass

$$\langle \partial_i X, R_j \rangle = -\varphi \langle X, \partial_{ij} N \rangle$$

für $i, j = 1, 2$, sodass

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^\varepsilon &= \mathcal{E}^\varepsilon - 2\varepsilon\varphi\mathcal{L} + \varepsilon^2 \|R_1\|^2 , \\
\mathcal{G}^\varepsilon &= \mathcal{G}^\varepsilon - 2\varepsilon\varphi\mathcal{N} + \varepsilon^2 \|R_2\|^2 , \\
\mathcal{F}^\varepsilon &= \mathcal{F}^\varepsilon - 2\varepsilon\varphi\mathcal{M} + \varepsilon^2 \langle R_1, R_2 \rangle .
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir mit der Identität auf Seite 31 im Minimalflächen Skript (S. 71 im Diffgeo Skript)

$$\det(G^\varepsilon) = \mathcal{E}^\varepsilon \mathcal{G}^\varepsilon - (\mathcal{F}^\varepsilon)^2 = \det(G)(1 - 4\varepsilon\varphi H) + R = \det(G)\left(1 - 4\varepsilon\varphi H + \frac{R}{\det(G)}\right),$$

wobei $R \in C_c(\Omega)$ und $R \in \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Da

$$\lim_{\varepsilon \to 0} -4\varepsilon\varphi H + \frac{R}{\det(G)} = 0$$

und $R/\det(G) \in C_c(\Omega)$, folgt die Behauptung mit $\det(G) > 0$. (*Hinweis : Zur Herleitung siehe auch Seite 82f im Diffgeo Skript.*)