UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dominik Schillo, M.Sc.

Übungen zur Vorlesung
Minimalflächen
Wintersemester 2018/19

Blatt 3 **Besprechung:** 07.12.2018

Übung 1.
Sei

$$X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto \frac{1}{u^2+v^2+1}(2u, 2v, u^2+v^2-1).$$

(i) Zeigen Sie, dass X ein parametrisiertes Flächenstück ist.

(ii) Bestimmen Sie die Gaußabbildung N von X.

Lösung 1.
Seien $u, v \in \mathbb{R}$.

(i) Es gilt

$$\begin{aligned} X_u(u,v) &= \frac{-2u}{(u^2+v^2+1)^2}(2u, 2v, u^2+v^2-1) + \frac{2}{u^2+v^2+1}(1,0,u) \\ &= \frac{2}{(u^2+v^2+1)^2}(-u^2+v^2+1, -2uv, 2u) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} X_u(u,v) &= \frac{-2v}{(u^2+v^2+1)^2}(2u, 2v, u^2+v^2-1) + \frac{2}{u^2+v^2+1}(0,1,v) \\ &= \frac{2}{(u^2+v^2+1)^2}(-2uv, u^2-v^2+1, 2v), \end{aligned}$$

sodass

$$\langle X_u(u,v), X_v(u,v)\rangle = 0$$

und

$$|X_u(u,v)| = \frac{2}{u^2+v^2+1} = |X_v(u,v)|\,.$$

Wir erhalten damit

$$X_u(u,v) \times X_v(u,v) = \frac{4}{(u^2+v^2+1)^3}(-2u, -2v, 1-u^2-v^2)$$

und

$$|X_u(u,v) \times X_v(u,v)| = |X_u(u,v)|\,|X_v(u,v)| = \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2} > 0.$$

(ii) Mit (i) erhalten wir

$$N(u,v) = \frac{1}{|X_u(u,v) \times X_v(u,v)|}X_u(u,v) \times X_v(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2+1}(-2u, -2v, 1-u^2-v^2).$$

Übung 2.
Zeigen Sie die *Parameterinvarianz des Flächeninhalts*: Seien $\Omega, \tilde{\Omega}$ zwei Gebiete, $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Parametrisierte Fläche, $\varphi\colon \tilde{\Omega} \to \Omega$ ein Diffeomorphismus und $\tilde{X} = X \circ \varphi$. Dann gilt

$$\int_\Omega |X_u(u,v) \times X_v(u,v)| \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{\tilde{\Omega}} \left|\tilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) \times \tilde{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v})\right| \mathrm{d}\tilde{u}\,\mathrm{d}\tilde{v}.$$

Lösung 2.
Sei $(\tilde{u},\tilde{v}) \in \tilde{\Omega}$. Es gilt

$$\tilde{G}_{(\tilde{u},\tilde{v})} = D\tilde{X}^T_{(\tilde{u},\tilde{v})} D\tilde{X}_{(\tilde{u},\tilde{v})} = D\varphi^T_{(\tilde{u},\tilde{v})} DX^T_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} DX_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})},$$

sodass

$$\det(\tilde{G}_{(\tilde{u},\tilde{v})}) = \det(DX^T_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} DX_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})}) \det(D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})})^2.$$

Damit erhalten wir mit der Transformationsformel

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\Omega}} \left|\partial_1 \tilde{X} \times \partial_2 \tilde{X}\right| \mathrm{d}\lambda &= \int_{\tilde{\Omega}} \sqrt{\det(\tilde{G}_{(\tilde{u},\tilde{v})})}\,\mathrm{d}\lambda(\tilde{u},\tilde{v}) \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} \sqrt{\det(DX^T_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})} DX_{\varphi(\tilde{u},\tilde{v})})} \left|\det(D\varphi_{(\tilde{u},\tilde{v})})\right| \mathrm{d}\lambda(\tilde{u},\tilde{v}) \\
&= \int_{\Omega} \sqrt{\det(DX^T_{(u,v)} DX_{(u,v)})}\,\mathrm{d}\lambda(u,v) \\
&= \int_{\Omega} \sqrt{\det(G_{(u,v)})}\,\mathrm{d}\lambda(u,v) \\
&= \int_{\Omega} |\partial_1 X \times \partial_2 X| \,\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

Übung 3.
Berechnen Sie die zweite Fundamentalform für Graphenflächen G_f, d.h. es sei $G_f = F(\Omega)$ mit $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (u,v,f(u,v))$ mit einer geeigneten Funktion f. Für $p \in S$ und $\xi, \eta \in T_pS$ ist

$$II_p(\xi,\eta) = -d\mathcal{N}_p(\xi)\cdot\eta \quad \text{mit} \quad \mathcal{N}(p) = N(F^{-1}(p)).$$

Seien $(u_0,v_0) \in \Omega, z, w \in \mathbb{R}^2$ und definiere $p = F(u_0,v_0)$ sowie $\xi = DF(u_0,v_0)z$ und $\eta = DF(u_0,v_0)w$.

(i) Zeigen Sie, dass die folgende Beziehung gilt

$$II_p(\xi,\eta) = -(DN(u_0,v_0)z)\cdot(DF(u_0,v_0)w).$$

(ii) Folgern Sie schließlich

$$II_p(\xi,\eta) = \left(\frac{D^2 f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}(u_0,v_0)z\right)\cdot w.$$

Lösung 3.
(i) Nach Seite 27 im Skript gilt

$$d\mathcal{N}_p(\partial_i F(u_0,v_0)) = \partial_i N(u_0,v_0)$$

für $i = 1,2$. Da $d\mathcal{N}_p$ linear ist, folgt

$$d\mathcal{N}_p(\xi) = d\mathcal{N}_p\left(\sum_{i=1}^2 z_i \partial_i F(u_0,v_0)\right) = \sum_{i=1}^2 z_i \partial_i N(u_0,v_0) = DN(u_0,v_0)z,$$

sodass

$$\begin{aligned} II_p(\xi,\eta) &= -\langle d\mathcal{N}_p(\xi),\eta\rangle \\ &= -\langle DN(u_0,v_0)z, DF(u_0,v_0)w\rangle \\ &= -\langle DF(u_0,v_0)^T DN(u_0,v_0)z, w\rangle. \end{aligned}$$

(ii) Da

$$DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_1 f & \partial_2 f \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \frac{1}{\sqrt{1+(\partial_1 f)^2+(\partial_2 f)^2}}\begin{pmatrix} -\partial_1 f \\ -\partial_2 f \\ 1 \end{pmatrix}$$

gelten, folgt

$$\partial_i N_3 = -\frac{1}{(1+(\partial_1 f)^2+(\partial_2 f)^2)^{3/2}}(\partial_1 f\partial_{1i}f+\partial_2 f\partial_{2i}f)$$

für alle $i=1,2$ und damit

$$\begin{aligned} \partial_i N_j &= -\frac{\partial_{ij}f}{\sqrt{1+(\partial_1 f)^2+(\partial_2 f)^2}} + \partial_j f\frac{\partial_1 f\partial_{1i}f+\partial_2 f\partial_{2i}f}{(1+(\partial_1 f)^2+(\partial_2 f)^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{\partial_{ij}f}{\sqrt{1+(\partial_1 f)^2+(\partial_2 f)^2}} - \partial_j f\partial_i N_3 \end{aligned}$$

für alle $i,j=1,2$. Daraus ergibt sich

$$DF(u_0,v_0)^T DN(u_0,v_0) = -\frac{D^2 f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}(u_0,v_0),$$

sodass

$$II_p(\xi,\eta) = -\langle DF(u_0,v_0)^T DN(u_0,v_0)z,w\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}(u_0,v_0)\langle D^2 f(u_0,v_0)z,w\rangle.$$