UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Minimalflächen
Wintersemester 2018/19

Blatt 4 **Besprechung:** 11.01.2019

Hinweis: Man vergleiche §3 im Minimalflächenskript.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ und $z_0 \in U$. Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar in* z_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

existiert, wobei $h \in \mathbb{C}$. Man bezeichnet obigen Grenzwert dann als $f'(z_0)$. Die Funktion f heißt *holomorph in* z_0, falls eine Umgebung von z_0 existiert, in welcher f komplex differenzierbar ist. Man nennt f auf U holomorph, wenn $f'(z)$ für alle $z \in U$ existiert.

Im nachfolgenden Satz stellen wir einen Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit heraus:

Satz 0.1. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$. Dann sind für eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) f ist komplex differenzierbar in z_0.

(ii) f ist im reellen Sinne total differenzierbar in z_0 und es gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, d.h.

$$\partial_1 \operatorname{Re}(f)(z_0) = \partial_2 \operatorname{Im}(f)(z_0),$$
$$\partial_1 \operatorname{Im}(f)(z_0) = -\partial_2 \operatorname{Re}(f)(z_0).$$

Ferner beweit man in der Vorlesung den sogenannten Riemannschen Hebbarkeitsthm, welcher besagt, dass eine Singularität einer holomorphen Funktion genau dann behoben bzw. entfernt werden kann, wenn ein Gebiet um diese Singularität existiert, auf welchem die holomorphe Funktion beschränkt ist. Wir nennen eine solche Singularität *hebbar*.

Satz 0.2. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in G$ und $f\colon G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Für ein $r > 0$ sei f beschränkt auf $\overline{D_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$, d.h.*

$$\sup_{0<|z-z_0|\le r} |f(z)| < \infty$$

Dann gibt es eine eindeutige bestimmte holomorphe Funktion $\tilde{f}\colon G \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \tilde{f}(z)$ für alle $z \neq z_0$.

Schließlich führen wir noch den Begriff der meromorphen Funktion ein. Dazu sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $P \subset U$ diskret, d.h. ohne Häufungspunkt in U. f heißt *meromorph auf* U genau dann, wenn f holomorph auf $U \setminus P$ ist und die Punkte aus P Polstellen von f sind. Dabei ist ein Punkt z_0 ein

Pol der Ordnung n ($n \in \mathbb{N}$) von f genau dann, wenn reelle Zahlen $0 < M_1 < M_2 < \infty$ existieren mit

$$M_1|z - z_0|^{-n} \leq |f(z)| \leq M_2|z - z_0|^{-n}$$

für $z \neq z_0$ nahe z_0.

Übung 1.
Sei $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-Funktion. Wir setzen

$$\phi_k(z) = \partial_1 F^k(z) - i\partial_2 F^k(z)$$

für $k \in \{1, 2, 3\}$ und $z = x + iy = (x, y) \in \Omega$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) ϕ_k ist holomorph auf Ω für $k \in \{1, 2, 3\}$ genau dann, wenn $\Delta F \equiv 0$.

(ii) F ist konform, d.h. $|\partial_1 F| = |\partial_2 F|$ und $\partial_1 F \cdot \partial_2 F = 0$, genau dann, wenn $\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 \equiv 0$.

(iii) Sei F konform. Dann ist Rang $DF(z) = 2$ für alle $z \in \Omega$ genau dann, wenn $\sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 > 0$ für alle $z \in \Omega$.

Lösung 1.

(i) Für alle $k \in \{1, 2, 3\}$ ist ϕ_k reell total differenzierbar, da F eine C^2-Funktuion ist. Es gelten

$$\begin{aligned}
\partial_1 \operatorname{Re}(\phi_k)(z) - \partial_2 \operatorname{Im}(\phi_k)(z) &= \partial_{11} F^k(x, y) + \partial_{22} F^k(x, y) = \Delta F^k(z) \\
\partial_1 \operatorname{Im}(\phi_k)(z) + \partial_2 \operatorname{Re}(\phi_k)(z) &= -\partial_{12} F^k(x, y) + \partial_{21} F^k(x, y) = 0
\end{aligned}$$

für alle $k \in \{1, 2, 3\}$ und $z = x + iy = (x, y)$, wobei wir im letzten Schritt das Lemma von Schwarz benutzt haben. Hiermit folgt die Behauptung.

(ii) Es gilt

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 = \sum_{k=1}^3 (\partial_1 F^k)^2 - (\partial_2 F^k)^2 - 2i\partial_1 F^k \partial_2 F^k = (|\partial_1 F|^2 - |\partial_2 F|^2) + i(-2\partial_1 F \cdot \partial_2 F)$$

woraus die Behauptung folgt.

(iii) Wir beachten zunächst, dass Rang $DF(z) = 2$ für alle $z \in \Omega$ genau dann, wenn $\partial_1 F(z) \times \partial_2 F(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 = \sum_{k=1}^3 |\partial_1 F^k|^2 + |\partial_2 F^k|^2 &= 2|\partial_1 F|^2, \\
|\partial_1 F \times \partial_2 F|^2 = |\partial_1 F|^2 |\partial_2 F|^2 - (\partial_1 F \cdot \partial_2 F)^2 &= |\partial_1 F|^4,
\end{aligned}$$

sodass

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 = 2|\partial_1 F \times \partial_2 F|.$$

Damit folgt die Behauptung.

Übung 2.
Beweisen Sie:

(i) Sei $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ meromorph und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph mit der Eigenschaft: Hat g in z einen Pol der Ordnung m, soll f in z eine Nullstelle der Ordnung $n \geq 2m$ haben. Dann sind die Funktionen

$$\phi_1 = \frac{1}{2} f(1-g^2),\ \phi_2 = \frac{i}{2} f(1+g^2) \text{ und } \phi_3 = fg$$

holomorph in Ω und lösen

$$\sum_{k=1}^{3} \phi_k^2 \equiv 0. \tag{*}$$

(ii) Seien ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 Lösungen von (*), für welche *nicht*

$$\phi_1 = i\phi_2,\ \phi_3 = 0$$

ist, so findet man f und g wie in (i) beschrieben.

Lösung 2.

(i) Holomorphie ist klar und (*) ist einfaches nachrechnen/einsetzen.

(ii) Definiere

$$f = \phi_1 - i\phi_2,\ g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}.$$

Diese erfüllen die Voraussetzungen.

Übung 3.
Konstruieren Sie mit Hilfe von Aufgabe 1 und 2 eine Minimalfläche durch

$$f(z) = z^2,\ g(z) = \frac{1}{z}.$$

Lösung 3.
Sei $z = (u, v) \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2}(z^2 - 1),\ \phi_2(z) = \frac{i}{2}(z^2 + 1),\ \phi_3(z) = z.$$

Die Weierstraß-Darstellung lautet dann

$$\begin{aligned}
F_1(z) &= \operatorname{Re}\left(\int_0^z \frac{1}{2}(\zeta^2 - 1)\,\mathrm{d}\zeta\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z^3}{6} - \frac{z}{2}\right),\\
F_2(z) &= \operatorname{Re}\left(\int_0^z \frac{i}{2}(\zeta^2 + 1)\,\mathrm{d}\zeta\right) = \operatorname{Re} i\left(\frac{z^3}{6} + \frac{z}{2}\right),\\
F_3(z) &= \operatorname{Re}\left(\int_0^z \zeta\,\mathrm{d}\zeta\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(z^2\right),
\end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}
F_1(u, v) &= \frac{1}{6}(u^3 - 3uv^2) - \frac{1}{2}u,\\
F_2(u, v) &= \frac{1}{6}(v^3 - 3u^2v) - \frac{1}{2}v,\\
F_3(u, v) &= \frac{1}{2}(u^2 - v^2).
\end{aligned}$$