UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
Dr. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Minimalflächen
Wintersemester 2018/19

Blatt 5 **Besprechung:** 25.01.2019

Übung 1.
Zeigen Sie, dass sich die mittlere Krümmung H einer konform parametrisierten Fläche $S = F(\Omega)$ mit einer C^2-Funktion F durch

$$H = \frac{N \cdot \Delta F}{2\,|\partial_1 F|^2}$$

berechnen lässt.

Lösung 1.
Nach Lemma 3.1 gilt

$$\langle N, \Delta F\rangle = 2H\langle N, \partial_1 F \times \partial_2 F\rangle = 2H\,|\partial_1 F \times \partial_2 F| = 2H\,|\partial_1 F|^2\,,$$

da

$$|\partial_1 F \times \partial_2 F| = |\partial_1 F|\,|\partial_2 F| = |\partial_1 F|^2$$

auf Grund der Konformität von F.

Übung 2.
Seien $F, G\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ konforme Parametrisierungen von Minimalflächen $F(\Omega)$ und $G(\Omega)$ mit einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Falls $F + iG$ eine holomorphe Funktion ist, nennt man F und G konjugierte Minimalflächen.

(i) Zeigen Sie, dass Helikoid und Katenoid parametrisiert durch

$$F(u, v) = (a\cosh(v)\cos(u), a\cosh(v)\sin(u), av)$$

und

$$G(u, v) = (-a\sinh(v)\sin(u), a\sinh(v)\cos(u), -au)$$

mit $a > 0$ konjugierte Minimalflächen sind.

(ii) Seien zwei konjugierte Minimalflächen $F(\Omega)$ und $G(\Omega)$ gegeben. Beweisen Sie, dass

$$H_t = \cos(t)F + \sin(t)G$$

für $t \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine konform parametrisierte Minimalfläche ist.

Lösung 2.

(i) Für $(u,v) \in \Omega$ gilt

$$\begin{aligned}
\partial_1 F(u,v) &= (-a\cosh(v)\sin(u), a\cosh(v)\cos(u), 0)\\
\partial_{11} F(u,v) &= (-a\cosh(v)\cos(u), -a\cosh(v)\sin(u), 0)\\
\partial_2 F(u,v) &= (a\sinh(v)\cos(u), a\sinh(v)\sin(u), a)\\
\partial_{22} F(u,v) &= (a\cosh(v)\cos(u), a\cosh(v)\sin(u), 0)\\
\partial_1 G(u,v) &= (-a\sinh(v)\cos(u), -a\sinh(v)\sin(u), -a)\\
\partial_{11} G(u,v) &= (a\sinh(v)\sin(u), -a\sinh(v)\cos(u), 0)\\
\partial_2 G(u,v) &= (-a\cosh(v)\sin(u), a\cosh(v)\cos(u), 0)\\
\partial_{22} G(u,v) &= (-a\sinh(v)\sin(u), a\sinh(v)\cos(u), 0).
\end{aligned}$$

Damit sieht man sofort, dass

$$\Delta F = 0 = \Delta G$$

gilt und

$$|\partial_1 F|^2(u,v) = a^2\cosh(v)^2 = |\partial_2 F|^2(u,v), \quad |\partial_1 G|^2(u,v) = a^2\cosh(v)^2 = |\partial_2 G|^2(u,v)$$

sowie

$$\langle \partial_1 F, \partial_2 F\rangle = 0, \quad \langle \partial_1 G, \partial_2 G\rangle = 0$$

erfüllt sind, d.h. F und G sind konform parametrisierte Minimalflächen. Weiterhin gelten

$$\partial_1 F = \partial_2 G \quad \text{und} \quad \partial_2 F = -\partial_1 G,$$

sodass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind und F und G konjugierte Minimalflächen sind.

(ii) Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\Delta H_t = \cos(t)\Delta F + \sin(t)\Delta G = 0,$$

sodass H_t eine Minimalfläche ist. Nach Blatt 4, Aufgabe 1 (b) wissen wir, dass F genau dann konform ist, wenn $\sum_{k=1}^3 \varphi_k^2 = 0$ gilt, wobei $\varphi_k = \partial_1 F^{(k)} - i\partial_2 F^{(k)}$ $(k = 1,2)$. Analog ist G genau dann konform, wenn $\sum_{k=1}^3 \psi_k^2 = 0$ gilt, wobei $\psi_k = \partial_1 G^{(k)} - i\partial_2 G^{(k)}$ $(k = 1,2)$. Da F und G konjugierte Minimalflächen sind, folgt

$$\psi_k = \partial_1 G^{(k)} - i\partial_2 G^{(k)} = -\partial_2 F^{(k)} - i\partial_1 F^{(k)} = -i(\partial_1 F^{(k)} - i\partial_2 F^{(k)}) = -i\varphi_k$$

für $k = 1,2$. Mit

$$\begin{aligned}
\eta_k &= (\partial_1 - i\partial_2)H_t^{(k)}\\
&= \cos(t)(\partial_1 - i\partial_2)F^{(k)} + \sin(t)(\partial_1 - i\partial_2)G^{(k)}\\
&= \cos(t)\varphi_k + \sin(t)\psi_k\\
&= (\cos(t) - i\sin(t))\varphi_k
\end{aligned}$$

für $k = 1,2$ erhalten wir

$$\sum_{k=1}^3 \eta_k^2 = (\cos(t) - i\sin(t))^2 \sum_{k=1}^3 \varphi_k^2 = 0,$$

sodass H_t eine konform parametrisierte Minimalfläche ist.