Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis III (WS 2021/22)
Blatt 1

Aufgabe 1

(i) Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x\exp(x-y)$ im Punkt $(0,0)$ nach dem Satz von Taylor bis zur zweiten Ordnung und geben Sie das Restglied dritter Ordnung explizit an.

(ii) Bestimmen Sie durch elementare Umformungen die Taylorentwicklung der Funktionen

(a) $f(x,y) = \frac{2x-y}{2x+y}$ an der Stelle $(\frac{1}{2}, 1)$,

(b) $g(x,y) = \sin(xy)$ an der Stelle $(0,\pi)$.

Aufgabe 2

(i) Untersuchen Sie folgende Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf lokale Extrema:

(a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$,

(b) $g(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$.

(ii) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $(0,0) \in U$ und $f, g \in C^2(U)$. Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt von f und von g, so hat $f+g$ in $(0,0)$ kein lokales Extremum.

Aufgabe 3

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eine Funktion mit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass es Funktionen $u, v \in C^2(\mathbb{R})$ gibt, so dass $f(x,y) = u(x) + v(y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Aufgabe 4

(i) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ kann es eine Funktion $f_\alpha \in C^2(\mathbb{R}^2)$ geben mit

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(x,y) = \alpha xy - \exp(x+2y) + 1 \;\text{ und }\; \frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(x,y) = x^2 - 2\exp(x+2y) - 2y^2$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine solche Funktion f_α.

(ii) Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Untersuchen Sie, ob f in den folgenden Fällen eine lokale Extremstelle im Punkt $(0,0)$ besitzt und bestimmen Sie gegebenenfalls die Art der Extremstelle ($\mathrm{Hess}f(x,y)$ bezeichnet die Hessematrix von f im Punkt (x,y)):

(a) $\nabla f(0,0) = (1,1)$ und $\mathrm{Hess}f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ und $\mathrm{Hess}f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) $\nabla f(0,0) = (0,0)$ und $\mathrm{Hess}f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und sei $1 \le k \le \infty$. Man sagt, dass D einen C^k-Rand besitzt, falls zu jedem Punkt $p \in \partial D$ eine offene Umgebung U und eine Funktion $r \in C^k(U)$ existieren mit $U \cap D = \{x \in U : r(x) < 0\}$ und $\nabla r(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

Aufgabe 5

(i) Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit C^k-Rand, $1 \le k \le \infty$ und U, r wie oben. Zeigen Sie:

$$U \cap \partial D = \{x \in U : r(x) = 0\} \;\text{ und }\; U \cap (\overline{D})^c = \{x \in U : r(x) > 0\}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass jede offene Kugel im $\mathbb{R}^n$ einen C^∞-Rand besitzt.