Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis III (WS 2021/22)
Blatt 2

Aufgabe 1

Seien $1 < \alpha < 2$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^\alpha$. Dabei bezeichnet $|\cdot|$ (wie immer) die euklidische Norm.

(a) Zeigen Sie, dass $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

(b) Gilt auch $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$?(Begründung)

Aufgabe 2

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $x_1, \dots, x_n \in I$ und alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ gilt:

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n). \tag{1}$$

(b) Ist f strikt konvex und sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ mit $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, so gilt in (1) genau dann das Gleichheitszeichen, wenn $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) = (x^3 + xy + 1, x + y + y^3 + 1)$. Zeigen Sie, dass eine Umgebung U von $(-1, 2)$ und eine Umgebung V von $(-2, 10)$ existieren, so dass $g := f|_U$ ein C^∞-Bijektion von U auf V ist. Berechnen Sie $Dg^{-1}(-2, 10)$.

Aufgabe 4

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ eine Abbildung, so dass $Df(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar ist. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung f ist offen, d.h. offene Mengen werden auf offene Mengen abgebildet.

(b) Die Funktion $U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$ besitzt kein Maximum.

(c) Ist U beschränkt und f stetig auf $\overline{U}$ fortsetzbar, so besitzt die Funktion $\overline{U} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ||f(x)||$ ein Maximum und dieses wird auf ∂U angenommen.

Aufgabe 5

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, $g \in C^0([a,b])$ mit $g([a,b]) \subset I$ und $b - a = 1$. Zeigen Sie:

$$f\left(\int\limits_a^b g(x)dx\right) \leq \int\limits_a^b f(g(x)dx.$$