Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis III (WS 2021/22)
Blatt 3

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass keine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert, die injektiv ist.
(*Hinweis*: Mit f wäre auch $f(0, \cdot)$ injektiv.)

Aufgabe 2

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt von f. Zeigen Sie: Ist die Hesse-Matrix $H_f(x_0)$ invertierbar, so gibt es eine Umgebung U von x_0, in welcher x_0 der einzige kritische Punkt von f ist.

Aufgabe 3

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen und sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Für einen Punkt $(x_0, y_0) \in \Omega$ gelte $f(x_0, y_0) = 0$ und ferner sei die Matrix

$$A := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k}(x_0, y_0) \right)_{j,k=1,\dots,n}$$

invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren in dieser Situation eine offene Umgebung V von x_0, eine offene Umgebung W von y_0 und eine Funktion $\hat{\varphi} \in C^1(V, W)$ mit $f(x, \hat{\varphi}(x)) = 0$ für alle $x \in V$.
Zeigen Sie, dass

$$J_{\hat{\varphi}}(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \hat{\varphi}(x)) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \hat{\varphi}(x))$$

für alle $x \in V$ gilt.

Aufgabe 4

Sei X der Raum der reellen $(n \times n)$-Matrizen mit $n \geq 2$. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ konvex sind:

(i) $f_1(A) = |A|^p,\ p > 1 \quad (|A| := (\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}})$.

(ii) $f_2(A) = \det A$.

(iii) $f_3(A) = \operatorname{Spur} A$.

(iv) Die Menge $U := \{A \in X : \ \det A \neq 0\}$ ist offen.

(v) Die Abbildung

$$F : U \to U,\ A \mapsto A^{-1}$$

ist beliebig oft differenzierbar.

(vi) Seien $f : X \to \mathbb{R}$ die Determinantenabbildung und $A \in X$. Zeigen Sie, dass f zur Klasse C^∞ gehört und beweisen Sie

$$f'(E)(A) = \operatorname{Spur} A,$$

wobei $E \in X$ die Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 5

Gegeben sei die nichtlineare Gleichung

$$zx^4 + 2x\cos(y) + \sqrt{2}\sin(z) = 1.$$

(i) Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$, eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}$ von $\frac{\pi}{4}$ und eine C^∞-Funktion $\varphi : U \to V$ existieren mit $\varphi(0,0) = \frac{\pi}{4}$ und

$$\left\{(x,y,z) \in U \times V : zx^4 + 2x\cos(y) + \sqrt{2}\sin(z) = 1\right\} = \{(x,y,\varphi(x,y)) : (x,y) \in U\}.$$

(ii) Berechnen Sie $\nabla\varphi(0,0)$.