Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis III (WS 2021/22)
Blatt 4

Aufgabe 1

Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + 2xy - z^2$ und $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Zeigen Sie, dass $\min f(M)$ und $\max f(M)$ existieren und berechnen Sie alle Punkte, in denen f ihr Minimum bzw. Maximum annimmt.

Aufgabe 2

(a) Seien $n = 2$ und $f(x, y) = x^2 - y^2$. Wir setzen $M_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$, wobei $c \geq 0$. Für welche c ist M_c eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^∞ von $\mathbb{R}^2$?

(b) Zeigen Sie, dass der Tangentialraum an eine Untermannigfaltigkeit M in einem Punkt $p \in M$ nicht von der gewählten Karte abhängt.

(c) Bestimmen Sie die Tangentialebene an die Fläche $x = 2u, y = u^2 + v, z = v^2$ im Punkt $(0, 1, 1)$.

(d) Wir betrachten Satz 21.3 (iii) im Falle "$k = n$". Zeigen Sie, dass man in diesem Fall genau die offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ erhält.

(e) Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und "$k = n$". Zeigen Sie, dass $T_pM = \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 3

Seien $I = [a, b]$, $t_0 \in [a, b]$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und die Funktionen $b \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$, $A \in C^0(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ gegeben. Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= A(x) \cdot y(x) + b(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

genau eine lokale Lösung besitzt.

Aufgabe 4

Für das Anfangswertproblem $y' = f(x, y), y(\xi) = \eta$ ist die sog. Picard-Iteration definiert durch

$$y_0 = \eta, \quad y_n(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt.$$

(a) Lösen Sie auf $[0, \infty)$ das Anfangswertproblem

$$y' = ty, \quad y(0) = 1$$

mit Hilfe der Picard-Iteration. Führen Sie dabei zunächst einige Iterationsschritte durch, um das Bildungsgesetz der Iterierten zu erraten, und beweisen Sie Ihre Vermutung durch Induktion, bevor Sie mit $n \to \infty$ zur Grenze übergehen.

(b) Lösen Sie auf $[0, \infty)$ das Anfangswertproblem

$$y' = 2ty + 2t, \quad y(0) = 1$$

mit Hilfe der Picard-Iteration. Führen Sie dabei zunächst einige Iterationsschritte durch, um das Bildungsgesetz der Iterierten zu erraten, und beweisen Sie Ihre Vermutung durch Induktion, bevor Sie mit $n \to \infty$ zur Grenze übergehen.

Aufgabe 5

Seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $k \in C^0([a, b] \times [a, b])$ mit

$$\sup\{|k(x, t)| : (x, t) \in [a, b] \times [a, b]\} < \frac{1}{b - a}.$$

Zeigen Sie: Zu jedem $g \in C^0([a, b])$ existiert genau ein $f \in C^0([a, b])$ mit

$$f(x) = g(x) + \int_{a}^{b} k(x, t)f(t)dt \quad (x \in [a, b]).$$

(*Hinweis*: Banachscher Fixpunktsatz.)

Aufgabe 6

(a) Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann stark kontrahierend ist, wenn $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

(b) Zeigen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass die Gleichung

$$2x - \sin(x) = \frac{1}{2}$$

genau eine Lösung im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ besitzt.

(c) Wie viele Iterationsschritte sind nötig, um den Fixpunkt mit einer Genauigkeit von 10^{-3} zu bestimmen? Nehmen Sie $x_0 := 0$ als Startpunkt ihrer Iteration.