Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis III (WS 2021/22)
Blatt 5

Aufgabe 1

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir setzen:

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

wobei A^k das k-fache Matrizenprodukt bezeichnet. Wählen wir $||A|| := \sup\limits_{|v| \leq 1} |Av|$, so ist $||A^k|| \leq ||A||^k$, woraus die Konvergenz der Reihe folgt.
Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $D = D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ eine Diagonalmatrix, so gilt $e^D = D(e^{\alpha_1} \dots e^{\alpha_n})$.

(b) $e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA}$.

(c) $AB = BA \Longrightarrow e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

(d) Ist S regulär, so folgt: $S e^A S^{-1} = e^{SAS^{-1}}$.

(e) Ist A diagonalisierbar, so ist e^A auch diagonalisierbar.

(f) Die Abbildung $t \mapsto e^{tA}$ ist differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = A e^{tA}.$$

Aufgabe 2

Lösen Sie folgendes lineares System mit variablen Koeffizienten:

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!!!

Aufgabe 3

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a_0, \ldots, a_{n-1}, b \in C^0(I, \mathbb{R})$ und $y \in C^n(I, \mathbb{R})$. Wir betrachten

$$(1) \quad \text{homogene Gleichung :} \quad y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)}(x)$$

$$(2) \quad \text{inhomogene Gleichung :} \; y^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)}(x) + b(x).$$

Beweisen Sie folgenden Aussagen:

(a) Sei $H := \{\varphi \in C^n(I, \mathbb{R}) : \varphi \text{ löst } (1)\}$. Dann ist $\dim H = n$, d.h. es gibt n linear unabhängige Lösungen von (1) und $m > n$ Lösungen sind stets voneinander abhängig. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in H$ sind genau dann linear unabhängig, wenn für ein $x \in I$ (alle $x \in I$) gilt:

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{n-1}(x) & \ldots & \varphi_n^{n-1}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

(b) Sei ψ_0 eine spezielle Lösung von (2). Dann gilt:

$$\text{Lösungsmenge von } (2) = \psi_0 + H.$$

Aufgabe 4

Sei X eine beliebige Menge und $f : X \to [0, \infty]$ eine beliebige Abbildung auf X. Für $A \subset X$ wird definiert:

$$\varphi_f(A) := \sup_{E \subset A, \# E < \infty} \sum_{x \in E} f(x)$$

Zeigen Sie: $\varphi_f : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ist ein Maß auf X.

Aufgabe 5

Beweisen oder widerlegen Sie, welche der folgenden Funktionen $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ Maße auf $\mathbb{R}$ sind:

(a) $\mu(A) = \begin{cases} 0, & A \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$.

(b) $\mu(A) = \begin{cases} \infty, & A \text{ unbeschränkt} \\ 0, & A \text{ beschränkt} \end{cases}$.