Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis III (WS 2021/22)
Blatt 6

Es seien X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge. Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt Algebra, falls folgende Eigenschaften gelten:

(i) $X \in \mathcal{A}$.

(ii) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 1

Sei X eine Menge. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathcal{A} := \{A \subset X : A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\} \subset \mathcal{P}(X)$ ist eine Algebra.

(b) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra genau dann, wenn X endlich ist.

Aufgabe 2

Seien X eine Menge, $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Algebra. Zeigen Sie, dass zu jeder Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ von Mengen aus $\mathcal{A}$ eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{A}$ existiert, wobei $B_n \subset A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gelten soll, so dass

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n.$$

Aufgabe 3

Sei X eine Menge und μ ein Maß auf X. Zeigen Sie:

(a) Aus $C \subset X$ beliebig und $A \subset X$ μ-messbar folgt, dass A auch $(\mu\lfloor C)$-messbar ist.

(b) A ist genau dann μ-messbar, wenn $X - A$ μ-messbar ist.

(c) Zeigen Sie die Implikation:

$$\mu(A) = 0 \Longrightarrow A \text{ ist } \mu\text{-messbar}.$$

Aufgabe 4

Sei X eine Menge und seien $A, B \subset X$ Teilmengen von X sowie χ_A, χ_B die charakteristischen Funktionen der jeweiligen Menge. Mit $A \vartriangle B := (A - B) \cup (B - A)$ wird die symmetrische Differenz von A und B bezeichnet. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

(b) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$.

(c) $\chi_{A-B} = \chi_A(1 - \chi_B)$.

(d) $\chi_{A\vartriangle B} = |\chi_A - \chi_B|$.

Aufgabe 5

Sei X eine beliebige Menge. Zeigen Sie: Ist μ ein Maß auf X, so gilt für $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P}(X)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty \Longrightarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) = 0.$$

Aufgabe 6

Sei X eine Menge und seien $A_n \subset X (n \in \mathbb{N})$ Teilmengen von X. Der *Limes superior* und der *Limes inferior* sind definiert als

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \{x \in X : x \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\},$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \{x \in X : \exists n_0(x) \in \mathbb{N} : x \in A_n \, \forall n \geq n_0(x)\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\chi_{\limsup A_n} = \limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n}$

(b) $\chi_{\liminf A_n} = \liminf_{n\to\infty} \chi_{A_n}$