Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis III (WS 2021/22)
Blatt 7

Aufgabe 1

Zeigen Sie: Das in Definition 23.5 definierte Lebesgue-Maß ist ein Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

(a) Seien $\mathcal{L}^n$ das Lebesgue-Maß,$A \subset \mathbb{R}^n, r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ und $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $T(x) = (r_1 x_1, \dots, r_n x_n)$. Dann gilt:

$$\mathcal{L}^n(T(A)) = |r_1 \cdot \ldots \cdot r_n| \mathcal{L}^n(A).$$

(b) Zeigen Sie: Gilt $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_k = c\}$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}, c \in \mathbb{R}$, dann folgt $\mathcal{L}^n(A) = 0$.

Aufgabe 3

Es sei $\emptyset \neq X$ eine beliebige Menge und μ_e ein äußeres Maß auf X. Weiter bezeichnen wir mit

$$\mathcal{M}_{\mu_e} := \{E \subset X : \mu_e(A) = \mu_e(A \cap E) + \mu_e(A - E) \text{ für alle } A \subset X\}$$

die σ-Algebra aller μ_e-messbaren Teilmengen von X und mit $\mu := \mu_e|_{\mathcal{M}_{\mu_e}}$ das von μ_e auf $\mathcal{M}_{\mu_e}$ induzierte Maß. Durch

$$\mu_{ee}(A) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) : E_j \in \mathcal{M}_{\mu_e} \text{ und } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right\}, \ A \subset X$$

wird dann wiederum ein äußeres Maß auf X definiert.

(a) Zeigen Sie für alle $A \subset X$ die Ungleichung $\mu_e(A) \leq \mu_{ee}(A)$.

(b) Sei nun speziell $X = \mathbb{R}$ und

$$\mu_e(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A = \emptyset \\ 1, & \text{falls } \emptyset \neq A \subsetneq \mathbb{R} \\ 2, & \text{falls } A = \mathbb{R} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass dieses μ_e ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}$ ist, bestimmen Sie $\mathcal{M}_{\mu_e}$ in diesem Fall und konstruieren Sie daraus ein Beispiel, welches zeigt, dass im allgemeinen $\mu_e < \mu_{ee}$ gelten kann.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra auf der Menge X und sei $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ eine Funktion mit $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{M}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie für $A, B \in \mathcal{M}$:

(a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$,

(b) Ist $A \subset B$, so gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$,

(c) Ist $A \subset B$ und $\mu(A) < \infty$, so gilt $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Aufgabe 5

Zeigen Sie: Sei $N \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge, so gibt es einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ mit $\{x + q : q \in \mathbb{Q}\} \cap N = \emptyset$.
Hinweis: Beweisen Sie diese Aussage indirekt.