Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Analysis III (WS 2021/22)
Blatt 8

Aufgabe 1

Es sei λ ein Maß auf X und seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ λ-messbare Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $|f|, \min\{f, g\}, \max\{f, g\}$ sind λ-messbar.

(b) Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ λ-messbar.

Aufgabe 2

Sei X eine beliebige Menge und λ ein Maß darauf.

(a) Seien $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ λ-messbare Funktionen. Zeigen Sie:
Für alle $r > 0$ ist $\{x \in X : |f(x) - g(x)| < r\}$ λ-messbar.

(b) Sei $(f_n)_n$ eine Folge λ-messbarer Funktionen von X nach $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{x \in X :$ die Folge $(f_n(x))_n$ konvergiert in $\mathbb{R}^n\}$ λ-messbar ist. *Hinweis*: Betrachten Sie die Mengen

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{j,k=m}^{\infty} \left\{x \in X : |f_k(x) - f_j(x)| < \frac{1}{n}\right\}.$$

Aufgabe 3

Seien X und λ wie in Aufgabe 2, (Y, d) ein metrischer Raum, und $f, g : X \to Y$ λ-messbare Funktionen. Für eine λ-messbare Menge A sei die Funktion $h_A : X \to Y$ definiert durch

$$h_A(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A \\ g(x), & \text{falls } x \in X - A \end{cases}$$

für $x \in X$. Zeigen Sie, dass h_A λ-messbar ist.

Aufgabe 4

Seien $\mathcal{L}^n$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $h, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zwei stetige Funktionen mit $h(x) = g(x)$ für $\mathcal{L}^n$-fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. (*Hinweis*: Zeigen Sie zunächst, dass jede beliebige $\mathcal{L}^n$-Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ keine inneren Punkte besitzt.)

Aufgabe 5

Seien X und λ wie in Aufgabe 2, und (Y, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) f ist einfach, d.h. es gibt paarweise disjunkte λ-messbare Mengen $A_1, \ldots, A_n$ mit $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ derart, dass $f|_{A_j}$ konstant ist für $j = 1, \ldots, n$.

(b) f ist λ-messbar und die Menge $f(X)$ ist endlich.