



Aufgabe 1

Sei λ ein Maß auf X .

- (a) Beweisen Sie: $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann λ -messbar, wenn jede Komponente von f λ -messbar ist.
- (b) Seien zusätzlich Y, Z topologische Räume, $f : X \rightarrow Y$ sei λ -messbar und $g : Y \rightarrow Z$ sei stetig. Zeigen Sie, dass $g \circ f : X \rightarrow Z$ λ -messbar ist.

Aufgabe 2

- (a) Sei λ ein Maß auf \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ λ -messbar ist.
- (b) Zeigen Sie, dass der Satz von Egoroff nicht gilt, wenn man auf die Voraussetzung $\mu(A) < \infty$ verzichtet.

Aufgabe 3

Für $0 \leq s < \infty$ werden folgende Mengenfunktionen auf dem \mathbb{R}^n definiert (mit $A \subset \mathbb{R}^n$):

- (a) Für $0 < \delta \leq \infty$ sei

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } A_i}{2} \right)^s : A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, \text{diam}(A_i) \leq \delta, A_i \subset \mathbb{R}^n \forall i \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\text{wobei } \alpha(s) = \begin{cases} \text{Volumen der } s\text{-dim. Einheitskugel,} & s \in \mathbb{N} \\ > 0 \text{ beliebig,} & \text{sonst} \end{cases}.$$

- (b) $\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \searrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A)$.

Zeigen Sie: \mathcal{H}_δ^s und \mathcal{H}^s sind Maße auf \mathbb{R}^n , $\delta \mapsto \mathcal{H}_\delta^s$ ist monoton fallend und schließen Sie daraus, dass $\mathcal{H}^s(A)$ existiert.

Aufgabe 4

Es seien \mathcal{H}_δ^s und \mathcal{H}^s die in Aufgabe 3 definierten Maße. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften von \mathcal{H}^s bzw. \mathcal{H}_δ^s :

- (a) \mathcal{H}^s ist ein Borel-Maß.
- (b) \mathcal{H}^s ist Borel-regulär.
- (c) Setzt man $\alpha(0) = 1$, so ist \mathcal{H}^0 das Zählmaß.
- (d) $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}_\delta^s = \mathcal{L}^1$ auf \mathbb{R} (für alle $\delta > 0$).
- (e) $\mathcal{H}^s \equiv 0$ auf \mathbb{R}^n für $n < s$.
- (f) Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ und $0 \leq s < t < \infty$. Aus $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ folgt $\mathcal{H}^t(A) = 0$.