



### **Aufgabe 1**

Sei  $\lambda$  ein Maß auf  $X$ .

- (a) Beweisen Sie:  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist genau dann  $\lambda$ -messbar, wenn jede Komponente von  $f$   $\lambda$ -messbar ist.
- (b) Seien zusätzlich  $Y, Z$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  sei  $\lambda$ -messbar und  $g : Y \rightarrow Z$  sei stetig. Zeigen Sie, dass  $g \circ f : X \rightarrow Z$   $\lambda$ -messbar ist.

### **Aufgabe 2**

- (a) Sei  $\lambda$  ein Maß auf  $\mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $\lambda$ -messbar ist.
- (b) Zeigen Sie, dass der Satz von Egoroff nicht gilt, wenn man auf die Voraussetzung  $\mu(A) < \infty$  verzichtet.

### **Aufgabe 3**

Für  $0 \leq s < \infty$  werden folgende Mengenfunktionen auf dem  $\mathbb{R}^n$  definiert (mit  $A \subset \mathbb{R}^n$ ):

- (a) Für  $0 < \delta \leq \infty$  sei

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s) \left( \frac{\text{diam } A_i}{2} \right)^s : A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, \text{diam } (A_i) \leq \delta, A_i \subset \mathbb{R}^n \forall i \in \mathbb{N} \right\},$$

wobei  $\alpha(s) = \begin{cases} \text{Volumen der s-dim. Einheitskugel,} & s \in \mathbb{N} \\ > 0 \text{ beliebig,} & \text{sonst} \end{cases}$ .

- (b)  $\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \searrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A)$ .

Zeigen Sie:  $\mathcal{H}_\delta^s$  und  $\mathcal{H}^s$  sind Maße auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $\delta \mapsto \mathcal{H}_\delta^s$  ist monoton fallend und schließen Sie daraus, dass  $\mathcal{H}^s(A)$  existiert.

#### Aufgabe 4

Es seien  $\mathcal{H}_\delta^s$  und  $\mathcal{H}^s$  die in Aufgabe 3 definierten Maße. Zeigen Sie die folgenden Eigenchaften von  $\mathcal{H}^s$  bzw.  $\mathcal{H}_\delta^s$ :

- (a)  $\mathcal{H}^s$  ist ein Borel-Maß.
- (b)  $\mathcal{H}^s$  ist Borel-regulär.
- (c) Setzt man  $\alpha(0) = 1$ , so ist  $\mathcal{H}^0$  das Zählmaß.
- (d)  $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}_\delta^s = \mathcal{L}^1$  auf  $\mathbb{R}$  (für alle  $\delta > 0$ ).
- (e)  $\mathcal{H}^s \equiv 0$  auf  $\mathbb{R}^n$  für  $n < s$ .
- (f) Seien  $A \subset \mathbb{R}^n$  und  $0 \leq s < t < \infty$ . Aus  $\mathcal{H}^s(A) < \infty$  folgt  $\mathcal{H}^t(A) = 0$ .