Analysis III
WiSe 2021/22

M. Fuchs

Inhalt

20

Höhere Ableitungen, Satz von Taylor, Extremwerte, Konvexität

Höhere Ableitungen werden rekursiv definiert.

Situation : $\begin{cases} X, Y \text{ endlich dim. } \mathbb{R}\text{- V.R. }, \ U \text{ offen } \subset X \\ f: \ U \to Y \text{ differenzierbar} \end{cases}$

Dann definiert f' eine Abbildung $U \to L(X, Y)$, die jedem $x \in U$ eine **lineare** Abbildung $X \to Y$ zuordnet.

Definition 20.1 : *(***2$^{\text{te}}$ Ableitung***)*

a) Ist f' diff'bar an einer Stelle $a \in U$, so heißt $(f')'(a)$ die **2$^{\text{te}}$ Ableitung** *von f in a.*

b) f heißt auf U **2$^{\text{mal}}$ diff'bar***, wenn $(f')'(a)$ an jeder Stelle $a \in U$ existiert.*

Schreibweise: $f''(a)$ *oder* $f^{(2)}(a)$ *statt* $(f')'(a)$ *bzw.* $D^2 f(a)$

Interpretation von $\mathbf{f''(a)}$:

Sei $Z = L(X, Y) \overset{\text{per Def}}{\Longrightarrow} f''(a): \ X \longrightarrow Z$ linear, also $f''(a) \in L(X, Z) = L\Big(X, L(X, Y)\Big)$.

D.h.: für jeden Vektor $v \in X$ ist $f''(a)(v)$ eine lineare Abbildung $X \to Y$,

kann also nochmal auf einen Vektor $w \in X$ angewendet werden.

$\Big(f''(a)(v)\Big)(w)$ ist dann ein Element von Y.

Man schreibt: $\boxed{f''(a)(v, w) \ \text{ und interpretiert } \ f''(a) \text{ als Bilinearform } X \times X \longrightarrow Y}$

Bemerkungen :

1) $\Big(f''(a)(v)\Big)(w)$ ist offenbar linear in v und w.
2) Wir geben gleich Formeln für diesen Ausdruck an.

Rekursive Definition von k-maliger Differenzierbarkeit:

$U \subset X$ offen, Y $\mathbb{R}$-V.R., $\dim X, \dim Y < \infty$ wobei $Y_\ell := L(X, Y_{\ell-1})$, $Y_0 := Y$.
(beachte: Y_ℓ ist für alle ℓ endlich dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum)
setze nun: $f^{(\ell)} := (f^{(\ell-1)})' : U \to Y_\ell$

Definition 20.2 :

$$
\begin{aligned}
C^0(U,Y) &:= \{f : U \to Y \mid f \text{ stetig}\},\\
C^1(U,Y) &:= \{f : U \to Y \mid f' \text{ existiert und ist stetig }\},\\
C^k(U,Y) &:= \{f : U \to Y \mid f^{(k)} \text{ existiert und ist stetig }\},\\
C^\infty(U,Y) &:= \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U,Y).
\end{aligned}
$$

Man kann sich (mit Induktion!) überlegen:
| $f^{(k)}(a)$ kann aufgefaßt werden als k-lineare Abbildung $X \times \ldots \times X \longrightarrow Y$.

<u>Kehren wir zurück zu</u> $f''(a) : X \times X \longrightarrow Y$.

Wir hatten definiert $\Big(f''(a)$ ist <u>lin. Abb.</u> $X \to L(X,Y)\Big)$
$f''(a)(v,w) := \Big(\underbrace{f''(a)(v)}_{\in L(X,Y)}\Big)(w)$,

und es sieht so aus, als ob man die Reihenfolge von v, w beachten müßte. Dem ist nicht so!

Satz 20.1 :

Sei $f : X \supset U \to Y$ 2-mal (total !) diff'bar in $a \in U$. Dann gilt für alle $v, w \in X$:

$$\boxed{f''(a)(v,w) = \partial_w(\partial_v f)(a) = \partial_v(\partial_w f)(a) = f''(a)(w,v)}$$

(Das ist einerseits eine Formel zur Berechnung von $f''(a)(v,w)$ mit Richtungsableitungen, andererseits bekommt man Vertauschbarkeit der Reihenfolge)

$f''(a)$ ist also eine **symmetrische Bilinearform**.
[zur Erinnerung : $\partial_u f(x) = \frac{d}{dt|_0}\ f(x+tu) = f'(x)u$]

Korollar :

Sei f **k-mal diff'bar** auf U. Dann ist $f^{(k)}(a): \ X \times \ldots \times X \longrightarrow Y$ k-linear und **symmetrisch**. Es gilt:

$$f^{(k)}(a)\ (v_1, \ldots, v_k) = \quad \underbrace{\partial_{v_k}\ (\partial_{v_{k-1}}(\ldots(\partial_{v_1} f)\ldots))}_{k\text{-fach iterierte Richtungsabl.}}\ (a).$$

Bemerkungen :

1) **Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen im Euklidischen Fall**

Seien $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$. Dann wissen wir:
Existenz nur von $\partial_i(\partial_j f)$ auf U für alle $i, j \not\Longrightarrow \partial_i(\partial_j f) = \partial_j(\partial_i f)$ (vgl. Analysis II)

Satz 20.1 zeigt dagegen:

$$f^{(2)}(x) \text{ existiert } \Longrightarrow \partial_i(\partial_j f)(x) = \partial_j(\partial_i f)(x) \quad \forall i, j$$

Wenn also in x die (totale) 2^{te} Ableitung existiert, so kann man bei allen 2^{ten} partiellen Ableitungen die Reihenfolge beliebig ändern.

| Dasselbe gilt sinngemäßfür k-mal diff'bare Funktionen und k-fache partielle Ableitungen.

2) **Wie berechnet man f″(x) im Euklidischen Fall ?**

Sei $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$ (f $\mathbb{R}^m$-wertig : analog!).
Nach unserer Interpretation ist $f''(a)$ eine **Bilinarform** auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,
$\{e_1, \ldots, e_n\}$ = kanonische Basis;
$v, w \in \mathbb{R}^n \implies v = \sum_{i=1}^{n} v_i\, e_i, \ w = \sum_{k=1}^{n} w_k\, e_k$

Damit: $$\boxed{f''(a)(v, w) = \sum_{i=1}^{n} v_i\, w_k\ \partial_i(\partial_k f)(a)}$$

Also: $f''(a)$ **entspricht der symmetrischem Matrix**

$$\Big(\partial_i(\partial_k f)(a)\Big)_{1\le i,k\le n} = \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_k}(a)\Big)_{1\le i,k\le n}$$, der sogenannten **Hesse-Matrix**.

Für $f^{(k)}(a)$, $k > 2$, bildet man eine entsprechende "Multimatrix".

3) Kriterien für die Existenz von $f^{(k)}(a)$: s. Satz 20.2
(in Termen k^{ter} partieller Ableitungen)

$\square$

Beweis von 20.1 :

$f: U \to Y$ sei 2^{mal} diff'bar in a, d.h. (Def. von $f''(a)$)

(1) $\lim\limits_{v\to 0} \frac{1}{|v|} \, |\underbrace{f'(a+v)}_{\in L(X,Y)!} - f'(a) - f''(a)(v)| \; = \; 0$, wobei $f''(a): \; X \to L(X,Y)$ linear.

Setze R_a : Nullumgebung in $X \to L(X,Y)$,

$$R_a(v) := \begin{cases} 0, & v = 0 \\ \frac{1}{|v|} \left(f'(a+v) - f'(a) - f''(a)v\right), & v \neq 0 \end{cases}$$

Gemäß (1) ist R_a stetig in 0, und wir können schreiben

(2) $f'(a+v) - f'(a) - f''(a)v = |v|R_a(v)$

Seien jetzt $u, v \in X$ beliebig. Für $t \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{t}\Big\{(\partial_u f)(a+tv) - (\partial_u f)(a)\Big\} \\ \overset{\partial_u f(x) = f'(x)u}{=} \; & \tfrac{1}{t}\Big\{f'(a+tv)(u) - f'(a)(u)\Big\} \\ \overset{(2) \text{ mit } tv \text{ statt } v}{=} \; & \tfrac{1}{t}\Big\{|tv|R_a(tv)(u) + f''(a)(tv)(u)\Big\} \\ \overset{\text{Linearität von } f''(a)(\ldots)(u)}{=} \; & |v| \cdot R_a(tv)(u) + f''(a)(v)(u). \end{aligned}$$

Also existiert $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big\{(\partial_u f)(a+tv) - (\partial_u f)(a)\Big\}$, mit Wert $f''(a)(v)(u)$.

Es folgt nach Def. der Richtungsableitung

(3) $\partial_v(\partial_u f)(a) = f''(a)(v)(u)$

und analog

(4) $\partial_u(\partial_v f)(a) = f''(a)(u)(v)$.

Zum Beweis der Symmetrie argumentieren wir heuristisch:

$$\begin{aligned} \partial_v(\partial_u f)(a) \quad & \approx \quad \tfrac{1}{t}\Big\{(\partial_u f)(a+tv) - (\partial_u f)(a)\Big\} \\ & \approx \quad \tfrac{1}{t}\Big\{\tfrac{1}{s}\Big[f(a+tv+su) - f(a+tv)\Big] - \tfrac{1}{s}\Big[f(a+su) - f(a)\Big]\Big\} \\ & \overset{\text{setze } s=t}{=} \quad \tfrac{1}{s^2}\Big\{f(a+su+sv) - f(a+su) - f(a+sv) + f(a)\Big\} \\ & =: \quad \tfrac{1}{s^2} \cdot B_a(su, sv) \end{aligned}$$

$$\boxed{B_a(\tilde{u}, \tilde{v}) := f(a+\tilde{u}+\tilde{v}) - f(a+\tilde{u}) - f(a+\tilde{v}) + f(a)}$$

Der Ausdruck $B_a(\tilde{u},\tilde{v})$ ist symmetrisch in $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$, so dass $f''(a)(u)(v) = f''(a)(v)(u)$ und damit alles streng bewiesen ist wenn wir

(5) $\quad \lim\limits_{s\to 0} \frac{1}{s^2}\, B_a(su,sv) = f''(a)(v)(u)$ zeigen können.

zu (5) :

O.E. f $\mathbb{R}$-wertig (sonst wähle Basis in Y und betrachte die Komponenten von f).
Seien $u,v\in X$, $\delta>0$ sei so klein, dass für $0<s<\delta:\ a{+}su,\ a{+}sv,\ a{+}s(u{+}v)\in U$.
Sei ein $s\in(0,\delta)$ fixiert, $\tilde{u}:=su,\ \tilde{v}:=sv$.

Setze $F(t) := f(a+t\tilde{u}+\tilde{v}) - f(a+t\tilde{u})$ für $0\le t\le 1$.

$\Longrightarrow\quad F'(t) = f'(a+t\tilde{u}+\tilde{v})(\tilde{u}) - f'(a+t\tilde{u})(\tilde{u})$

$\overset{MWS}{\Longrightarrow}\quad F(1)-F(0) = B_a(su,sv) = F'(\vartheta)$ für ein $0<\vartheta<1$

Also:

$$\begin{aligned}
B_a(su,sv) &= f'(a+\vartheta\tilde{u}+\tilde{v})(\tilde{u}) - f'(a+\vartheta\tilde{u})(\tilde{u})\\
&= f'(a+\vartheta\tilde{u}+\tilde{v})(\tilde{u}) - f'(a)(\tilde{u}) - \Big(f'(a+\vartheta\tilde{u})(\tilde{u}) - f'(a)(\tilde{u})\Big)\\
&\overset{(2)}{=} |\vartheta\tilde{u}+\tilde{v}|\cdot R_a(\vartheta\tilde{u}+\tilde{v})(\tilde{u}) + f''(a)(\vartheta\tilde{u}+\tilde{v})(\tilde{u})\\
&\qquad -\Big(|\vartheta\tilde{u}|\cdot R_a(\vartheta\tilde{u})(\tilde{u}) + f''(a)(\vartheta\tilde{u})(\tilde{u})\Big)\\
&= f''(a)(\tilde{v})(\tilde{u}) + |\vartheta\tilde{u}+\tilde{v}|\ R_a(\vartheta\tilde{u}+\tilde{v})(\tilde{u}) - |\vartheta\tilde{u}|\ R_a(\vartheta\tilde{u})(\tilde{u})\\
&\qquad \uparrow\ \text{Bilinearität von} f''(a)\ \downarrow\\
&= s^2\Big\{f''(a)(v)(u) + |\vartheta u+v|\ R_a(\vartheta\tilde{u}+\tilde{v})(u) - |\vartheta u|\ R_a(\vartheta\tilde{u})(u)\Big\}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{1}{s^2}\,B_a(su,sv) = f''(a)(v)(u) + |\vartheta u+v|\ R_a(\vartheta\tilde{u}+\tilde{v})(u) - |\vartheta u|\ R_a(\vartheta\tilde{u})(u)$$

und man erhält $\quad \lim\limits_{s\downarrow 0} s^{-2}B_a(su,sv) = f''(a)(v)(u)$

gemäß $\quad \lim\limits_{w\to 0} R_a(w) = 0.$

□

Satz 20.2 : (**Kriterium für k-fache stetige Diff'barkeit**)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$. *Dann gilt:*
$f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$ *(d.h.* $f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}$ *existieren auf* U *und sind stetig)*

$$\Updownarrow$$

für jeden *Multiindex* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq k$, *existieren die partiellen Ableitungen*

$$\partial^\alpha f := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \left(\frac{\partial^{\alpha^2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \left(\ldots \left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \, f \right) \ldots \right) \right)$$

und sind **stetig** *auf* U $\quad \Big(\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \Big)$

Beweis : (Induktion über k)

Satz 18.4 ergibt den Induktionsanfang für $k = 1$.

$\square$

Beispiel :

Polynome und **rationale** Funktionen $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sind auf ihrem Definitionsbereich unendlich oft differenzierbar.

Als Anwendung des Konzepts der höheren Ableitung diskutieren wir nun

Taylor Formel für reellwertige Funktionen.

Satz 20.3 : *(wird in der Extremwertdiskussion eingesetzt, s.u.)*

Sei U *offen in* $\mathbb{R}^n$ *und* $f \in C^{\ell+1}(U, \mathbb{R})$ *für ein* $\ell \geq 1$. *Sei* $v \in \mathbb{R}^n$ *mit* $a + tv \in U$ *für alle* $0 \leq t \leq 1$, $a \in U$ *fixierter Punkt.*

Dann gilt:

$$\boxed{f(a+v) = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \underbrace{(v, \ldots, v)}_{k \ fach} + R_{a,\ell}(v)}$$

mit dem **Restglied**

$$\boxed{R_{a,\ell}(v) = \frac{1}{(\ell+1)!} f^{(\ell+1)}(a + \vartheta v) \underbrace{(v, \ldots, v)}_{\ell+1 \ fach}}$$

an einer geeigneten Zwischenstelle $\vartheta \in (0, 1)$.

Bemerkungen :

1) $f^{(k)}(b),\ b \in U$ ist eine k-lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $f^{(k)}(b)(w,\ldots,w)$ heißt, k-mal den selben Vektor w in diese Form einzutragen.
(Erinnerung : $f^{(k)}(b) = \partial_w(\partial_w \ldots (\partial_w f)\ldots)(b) = \frac{d^k}{dt^k|_0}\ f(b+tw)$)

2) Es gilt folgende **Integraldarstellung des Restglieds**:

$$R_{a,\ell}(v) = \frac{1}{\ell!}\int_0^1 (1-t)^\ell\ f^{(\ell+1)}(a+tv)(v,\ldots,v)\ dt$$

3) $f \in C^\infty(U) \implies$ die **formale Taylorreihe** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a,\ldots,x-a), x \in U$
mit Entwicklungsmitte a ist bildbar

4) f heißt **reell analytisch auf** U $:\iff$ jeder Punkt $a \in U$ hat eine Umgebung, auf der die formale Taylorreihe gegen f konvergiert

Beweis von Satz 20.3 :

Benutze die Taylorformel für $F(t) := f(a+tv),\ 0 \leq t \leq 1 \implies F(1) = \ldots$. Die Integraldarstellung 2) folgt aus der Darstellung des Restglieds von F.

$\square$

Lokale Extrema :

Definition 20.3 :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

a) Ist f auf U differenzierbar, so heißt $a \in U$ **kritischer Punkt von** *f, wenn $f'(a) = 0$ ist, also $\nabla f(a) = 0$ (da $f'(a)v = \langle \nabla f(a), v\rangle$)*

b) $a \in U$ heißt **lokales Maximum** *(Minimum) von f*

$$\iff$$

$\exists\, r > 0 :\ f(x) \leq (\geq) f(a)$ für alle $x \in B_r(a)$

("strikt", wenn $<$ $(>)$ für $x \in B_r(a) - \{a\}$)

Satz 20.4 :

Sei $f :\ U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a \in U$ lokales Max. (Min.).
Dann ist a kritischer Punkt.

allgemeiner:

a lokaler Extremwert
$\implies \partial_v f(a) = 0$ für jede Richtung v, für die $\partial_v f(a)$ existiert.

Bemerkung :

$$\nabla f(a) = 0 \quad \not\Longrightarrow \quad a \text{ lokaler Extremwert (ist ja schon falsch für } n = 1,\ x \mapsto x^3)$$

Beweis von Satz 20.4 :

Sei a lokales <u>Max</u> $\Longrightarrow$

$$f(a + tv) \leq f(a) \quad \forall\ |t| \text{ klein genug}$$

Also: $\frac{1}{t}\ (f(a+tv) - f(a)) \begin{cases} \geq 0, & t < 0 \\ \leq 0, & t > 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \partial_v f(a) = 0.$

Ist f diff'bar in a, so folgt $\partial_v f(a) = 0$ für alle v, d.h. $f'(a) = 0$.

$\square$

Beispiel :

$f(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy$ auf $U = \mathbb{R}^2$ $\qquad$ f ist beliebig oft diff'bar:

Kritische Punkte : $\frac{\partial f}{\partial x}\ (x,y) = 3x^2 - 3y \overset{!}{=} 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\ (x,y) = 3y^2 - 3x \overset{!}{=} 0$$

$\Longrightarrow \quad (0,0), (1,1)$ als Lösungen.

<u>in $(0,0)$ liegt kein lokaler Extremwert vor</u>:

es ist $\quad f(x,0) = x^3 \quad > 0$ für $x > 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad < 0$ für $x < 0$

d.h. f nimmt in jeder Umgebung von $(0,0)$ sowohl positive als auch negative Werte an.

f hat <u>keine absoluten Extremwerte</u>:

$$\left.\begin{array}{lcccl} f(n,0) & = & n^3 & \longrightarrow & \infty, \\ f(-n,0) & = & -n^3 & \longrightarrow & -\infty \end{array}\right\} \text{ bei } n \to \infty$$

<u>Was passiert in $(1,1)$</u>?

Um dies zu entscheiden, formulieren wir <u>Kriterien mit der 2^{ten} Ableitung</u>.

Einschub aus der Algebra :

$X = \mathbb{R}$ - V.R. endlicher Dimension,

$B : X \times X \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform $\Big(B(u,v) = B(v,u)\Big)$

$Q(v) := B(v,v)$ zugehörige quadratische Form.

Es gilt:

$$\left|\begin{array}{lll} Q \textit{ positiv (negativ) definit} & :\Longleftrightarrow & Q(v,v) > 0 (< 0) \quad \forall\, v \neq 0 \\ \ldots\ldots(\ldots) \textit{ semidefinit} & :\Longleftrightarrow & Q(v,v) \geq 0, Q(w,w) < 0 \quad \forall\, v \\ Q \textit{ indefinit} & :\Longleftrightarrow & \exists\, v, w \neq 0 \text{ mit } Q(v,v) > 0, Q(w,w) < 0 \end{array}\right.$$

(man sagt auch: B ist ... definit und meint das zugehörige Q)

Sei $X = \mathbb{R}^n$, A eine symmetrische $(n \times n)$ - Matrix, d.h. $\langle v, Aw \rangle = \langle Av, w \rangle \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n$

bilde $B(v,w) := \langle v, Aw \rangle \overset{Bilinearform (symm.!)}{\Longrightarrow} Q(v) = \langle v, Av \rangle$

Wie entscheidet man, ob dieses Q definit ist?

Betrachte dazu:

A symmetrisch $\Longrightarrow$ $\exists$ Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ aus *Eigenvektoren*
(also: $Av_i = \lambda_i v_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$)

schreibe nun $w \in \mathbb{R}^n$ als $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \Longrightarrow Q(w) = \langle w, Aw \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \langle v_i, Av_j \rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \lambda_i$,

und damit kann man sich sehr leicht überlegen, dass gilt:

$$\left|\begin{array}{lll} Q \textit{ positiv (negativ) definit} & \Longleftrightarrow & \textbf{alle} \text{ EW von } A \text{ positiv (negativ)} \\ \quad " \qquad\qquad \textit{semidefinit} & \Longleftrightarrow & \ldots\ldots \geq 0\ (\leq 0) \\ Q \textit{ indefinit} & \Longleftrightarrow & \exists \text{ EW } > 0 \textbf{ und } < 0 \end{array}\right.$$

$\to$ Wie schlägt man die Brücke zu lokalen Extremwerten?

Sei $f : U \to \mathbb{R}$, U offen $\subset \mathbb{R}^n$, von der Klasse C^2, a ein Punkt aus U. Dann gilt:

$$f''(a)(v,w) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} v_i w_j \,\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,(a) \;=\; \Big\langle v,\; \underbrace{\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,(a)\Big)_{1\le i,j\le n}}_{\uparrow\, A} \; w \Big\rangle$$

mit *symmetrischer Matrix* A (Hesse-Matrix).

Nach Taylor ist:

$$\begin{aligned} f\,(a+v) &= f\,(a) \;+\; \langle \nabla f\,(a), v\rangle \;+\; \tfrac{1}{2}\, f^{(2)}\,(a+\vartheta v)\,(v,v) \\ &= f\,(a) \;+\; \langle \nabla f\,(a), v\rangle \;+\; \tfrac{1}{2}\, f^{(2)}\,(a)\,(v,v) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\,\Big(f^{(2)}\,(a+\vartheta v)\,(v,v) \;-\; f^{(2)}\,(a)\,(v,v)\Big) \qquad \text{mit } \vartheta \in (0,1). \end{aligned}$$

Gemäß Vorraussetzung ist $f^{(2)} : U \to L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}))$ **stetig**, woraus unschwer folgt ($\to$ Übung!)

$$(1) \quad \lim_{x\to a} \; \sup_{|w|=1} \Big| f^{(2)}(x)(w,w) - f^{(2)}\,(a)(w,w)\Big| \;=\; 0$$

Sei nun a **kritischer Punkt** ($\nabla f(a) = 0$) und $f^{(2)}(a)$ **positiv** definit. Dann folgt

$$(2) \quad \min_{|w|=1} \; f^{(2)}(a)(w,w) =: c_\circ > 0.$$

(wegen der Stetigkeit von $w \mapsto f^{(2)}(a)(w,w)$ und der Kompaktheit von $\{w \in \mathbb{R}^n : |w| = 1\}$)

Für $v \neq 0$ folgt nach (2)

$$\begin{aligned} f(a+v) \;-\; f(a) &= \tfrac{1}{2}\, f^{(2)}(a)(v,v) \;+\; \tfrac{1}{2}\,\Big(f^{(2)}(a+\vartheta v)(v,v) \;-\; f^{(2)}(a)(v,v)\Big) \\ &\geq \tfrac{1}{2}\,|v|^2\, c_\circ \;-\; \tfrac{1}{2}\,|v|^2 \sup_{|w|=1} \Big| f^{(2)}(a+\vartheta v)(w,w) \;-\; f^{(2)}(a)(w,w)\Big|. \end{aligned}$$

Wählt man $|v| < \delta$ mit passendem δ, so kann man gemäß (1)

$$\sup_{|w|=1} |\ldots| \;\leq\; \frac{1}{2}\, c_\circ$$

erreichen, also

$$f(a+v) - f(a) \;\leq\; \frac{1}{4}\, c_\circ\, |v|^2 \quad \forall\, |v| < \delta.$$

f hat also in a ein strenges lokales Minimum. $\Longrightarrow$

Satz 20.5 :

Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^n$, *und* <u>*a kritischer Punkt von* f</u>. *Dann gilt:*

i)	*f" (a)* **positiv** *definit*	$\Longrightarrow$	*a ist striktes lokales* **Min.**
ii)	*f" (a)* **negativ** *definit*	$\Longrightarrow$	" **Max.**
iii)	*f" (a)* **indefinit**	$\Longrightarrow$	*a ist* **keine lokale** *Extremstelle*

Beweis :

(i), (ii) $\checkmark$

(iii) $f''(a)$ indefinit $\Longrightarrow$ $\exists$ Vektoren $u_\circ, v_\circ$ mit Länge 1 und

$$f^{(2)}(a)(u_\circ, u_\circ) \ < \ 0 \ < \ f^{(2)}(a)(v_\circ, v_\circ)$$

Daraus folgt für $|t| \neq 0$ klein (diskutiere $t \mapsto f\,(a+tu_\circ)$, $f(a+tv_\circ)$ als Fkt. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$$f(a+tu_\circ) - f(a) \ < 0 < \ f(a+tv_\circ) - f(a),$$

also kein Extremwert in a.

$\square$

Bemerkung :

<u>Die Kriterien sind nur hinreichend</u>! $f : t \mapsto t^4$ hat absolutes Min. in 0, $f''(0) = 0$.

Korollar :

Sei $f \in C^2\ (U, \mathbb{R})$. Dann gilt:
a lokales Max. (Min.) $\Longrightarrow f''(a)$ negativ (positiv) **semidefinit**

Beweis :

Sei a Max. $f''(a)$ nicht negativ semidefinit
$\Longrightarrow$ $\exists\ v_\circ, |v_\circ| = 1$ mit $f''(a)(v_\circ, v_\circ) < 0$
$\Longrightarrow$ $t \mapsto f(a+tv_\circ) = \varphi(t)$ erfüllt $\varphi'(0) = 0$ und $\varphi''(0) = f''(a)(v_\circ, v_\circ) > 0$
$\Longrightarrow$ $f(a) < f(a+tv_\circ)$ für $|t| \neq 0$ klein genug, Wspr.!

$\square$

Beispiel :

$$f(x,y) \;=\; x^3 + y^3 - 3xy \text{ in } (1,1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \;=\; 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \;=\; 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \;=\; -3 \quad \Longrightarrow \quad f^{(2)}(1,1) \;=\; \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Zeige (→ Übung):

Eine <u>symmetrische</u> 2×2 Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ist		
positiv definit	$\Longleftrightarrow$	$a > 0$ und $\det > 0$
negativ definit	$\Longleftrightarrow$	$a < 0$ und $\det > 0$
indefinit	$\Longleftrightarrow$	$\det < 0$

hier: $a = 6 > 0, \ \det = 27 > 0 \implies \underline{(1,1) \text{ lok. Min.}}$

Bemerkung :

Die Matrix $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,(a)\right)_{1<i,j\leq n}$ heißt <u>Hesse-Matrix</u> von f bei a.

Kriterien für Konvexität:

Erinnerung :

$U \subset \mathbb{R}^n$ <u>konvex</u>; $f : U \to \mathbb{R}$ <u>konvexe Funktion</u> $\Longleftrightarrow$
$f\Big(tx + (1-t)\,y\Big) \;\leq\; t\,f(x) + (1-t)f(y) \quad \forall\, x, y \in U, \ 0 \leq t \leq 1$
(streng konvex, konkav ...)

Satz 20.6 :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ konvex und offen, $f : U \to \mathbb{R}$ diff'bar. Dann gilt:

(i) *f konvex* $\Longleftrightarrow$ $f(x) \;\geq\; \overbrace{f(x_\circ) \;+\; \langle \nabla f(x_\circ),\ x - x_\circ \rangle}^{\text{Graph davon ist Ebene in } \mathbb{R}^{n+1} \text{ durch } (x_\circ,\ f(x_\circ)) \text{ "Stützebene"}}$ *für alle $x,\ x_\circ \in U$*

(ii) *f streng konvex* $\Longleftrightarrow >$ *analog* *für alle $x \neq x_\circ$*

(iii) *konkav (streng)* *analog*

Beweis : nur (i)

"$\Longrightarrow$": Sei f konvex.

Mit $v := x - x_\circ,\ t \in (0,1)$ ist $f(x_\circ + tv) \ \le\ t\, f(x_\circ + v) \ +\ (1-t)\ f(x_\circ)$

$\Longrightarrow\ \frac{1}{t}\Big(f(x_\circ + tv)\ -\ f(x_\circ)\Big)\ \le\ f(x_\circ + v)\ -\ f(x_\circ)$

und mit $t \downarrow 0:\quad \langle \nabla f(x_\circ), v\rangle\ \le\ f(x)\ -\ f(x_\circ)$

"$\Longleftarrow$": Wir wissen jetzt: $f(y+w)\ \ge\ f(y) + \langle \nabla f(y), w\rangle \quad \forall\, y \in U,\ y+w \in U.$

Seien $x_1 \neq x_2$ aus $U,\ t \in (0,1)$

setze $x_\circ := t \cdot x_1\ +\ (1-t)\ x_2,\ v := x_1 - x_\circ$

dann: $f(x_\circ + v)\ \ge\ f(x_\circ)\ +\ \Big\langle \nabla f(x_\circ),\ v\Big\rangle \quad \Longleftrightarrow$

(1) $f(x_1)\ \ge\ f\Big(tx_1 + (1-t)\ x_2\Big)\ +\ \Big\langle \nabla f(x_\circ), v\Big\rangle$

analog: $f(x_2)\ =\ f\Big(x_\circ\ +\ [-\frac{t}{1-t}\cdot v]\Big)\ \ge\ f(x_\circ) - \frac{t}{1-t}\Big\langle \nabla f(x_\circ),\ v\Big\rangle \quad \Longrightarrow$

(2) $f(x_2)\ \ge\ f\Big(tx_1\ +\ (1-t)\ x_2\Big)\ -\ \frac{t}{1-t}\Big\langle \nabla f(x_\circ),\ v\Big\rangle$

Nun multipliziere (1) mit t, (2) mit $(1-t)$ und addiere die Resultate.

$\square$

Für C^2-Funktionen läßt sich Konvexität, etc., einfach prüfen.

Satz 20.7 :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und konvex,* $\boxed{f \in C^2\ (U)}$

(i) f *konvex* $\Longleftrightarrow$ $f^{(2)}(x)$ *positiv semidefinit für alle* x

(ii) $f^{(2)}$ *positiv definit auf* U $\Longrightarrow$ f *streng konvex*

(iii) *"konkav"*

(iv) *"konkav"*

Bemerkung :

Umkehrung in (ii) falsch bereits für $n = 1:\ t \mapsto t^4,\ t \in \mathbb{R},$ ist streng konvex.

Beweis : nur (i)

"$\Longleftarrow$":

Wähle $x_\circ \neq x$ aus $U \overset{\text{Taylor}}{\Longrightarrow}$ es existiert $\vartheta \in (0,1)$, so dass gilt:

$f(x) = f(x_\circ) + \left\langle \nabla f(x_\circ),\ x - x_\circ \right\rangle + \frac{1}{2}\, f''\Big(x_\circ + \vartheta(x - x_\circ)\Big)(x - x_\circ, x - x_\circ)$

nach Vor. ist $f''(\ldots)(x - x_\circ,\ x - x_\circ)\ \geq\ 0$

also $f(x)\ \geq\ f(x_\circ)\ +\ \left\langle \nabla f(x_\circ),\ x - x_\circ \right\rangle$; nun benutze 20.6 .

"$\Longrightarrow$": (indirekt)

$f^{(2)}$ **nicht** positiv semidefinit auf U

$\Longrightarrow\ \exists\ x_\circ \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n,\ |v| = 1$, mit

$$f^{(2)}(x_\circ)(v,v) < 0.$$

Da $f^{(2)}$ auf U stetig ist, gibt es $B_\delta(x_\circ) \subset U$ mit

$$f^{(2)}(y)(v,v)\ < 0 \quad \forall\ y \in B_\delta(x_\circ). \qquad (*)$$

Wähle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $|t \cdot v| < \delta$
und setze $w := tv,\ x := x_\circ + w \in B_\delta(x_\circ) \overset{\text{Taylor}}{\Longrightarrow}$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_\circ) + \langle \nabla f(x_\circ),\ w\rangle + \int_0^1 (1-s) f^{(2)} \overbrace{(x_\circ + sw)}^{\in B_\delta(x_\circ)}(w,w)\, ds \\ &= f(x_\circ) + \langle \nabla f(x_\circ),\ w\rangle + t^2 \int_0^1 (1-s) f^{(2)}(x_\circ + sw)(v,v)\, ds \\ &\overset{(*)}{<} f(x_\circ) + \langle \nabla f(x_\circ),\ w\rangle. \end{aligned}$$

Da f konvex ist, widerspricht dies 20.6 i).

$\square$

$\rightarrow$ Übungen: weitere Beispiele!

21

Umkehrsatz, Implizite Funktionen

Problem :

Sei $f : X \supset U \to X$ gegeben, $a \in U$.

Wie entscheidet man, ob f lokal bei a invertierbar ist?

Damit ist gemeint:

Wann existiert $B_\delta(a) \subset U$ mit der Eigenschaft, dass f diese Kugel bijektiv auf eine offene Umgebung V von $f(a)$ in X abbildet?

a $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $f(a)$

Im Falle einer positiven Antwort ist $\left(f|_{B_\delta(a)}\right)^{-1} : V \to B_\delta(a)$ definiert, und man kann weiter fragen:

Ist $\left(f|_{B_\delta(a)}\right)^{-1}$ auf V diff'bar ? $\Big($ z.B. für $f \in C^1(U, X)\Big)$?

Wir wissen dann $\left(\left(f|_{B_\delta(a)}\right)^{-1}\right)' \left(f(a)\right) = f'(a)^{-1}$.

Erinnerung : "reeller Fall"

$(*)$ $\quad I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $a \in I,\ f \in C^1(I, \mathbb{R})$ mit $f'(a) \neq 0 \quad$ (O.E. $f'(a) > 0$)

$\Longrightarrow \quad \exists\, \delta > 0 :\ f' > 0$ auf $(a - \delta,\ a + \delta)$, also f streng wachsend auf $(a - \delta,\ a + \delta)$.

nach Satz 9.4 ist die Umkehrfunktion von $f|_{(a-\delta,\ a+\delta)}$ dann stetig, und Satz 11.6 ergibt die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion.

Im reellen Fall haben wir also eine vollständige Antwort auf unser Problem, und der nächste Satz zeigt, dass man im Allgemeinen die selben Resultate erzielen kann, wenn man die Voraussetzungen $(*)$ sinngemäß interpretiert, statt $f'(a) \neq 0$ wird man verlangen

$$\det f'(a) \neq 0,$$

denn es lassen sich ja bekanntlich nur reguläre lineare Abb. invertieren.

Satz 21.1 : Umkehrsatz

Seien X, Y $\mathbb{R}$-Vektorräume mit $\dim < \infty$, *U sei offen in X und $f \in C^\ell(U, Y)$ für ein $\ell \geq 1$. Sei $a \in U$ und die lineare Abbildung $f'(a) : X \to Y$ sei* **bijektiv**. *Dann bildet f eine offene Umgebung Ω von a in U* **homeomorph** *auf eine offene Umgebung V von $f(a)$ in Y ab, und die Umkehrbildung $g : V \to \Omega$ gehört zur Klasse $C^\ell(V, \Omega)$ mit*

$$\boxed{g'(y) = f'(x)^{-1},\ f(x) = y,\ x \in \Omega.}$$

Bemerkungen :

1) $f'(a) : X \to Y$ bijektiv heißt: $\dim X = \dim Y$
2) wichtiger Spezialfall: $X = Y = \mathbb{R}^n$
   dann lautet die Voraussetzung an $f'(a)$ folgendermaßen:

$$\boxed{\det \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right) \neq 0}$$

Der Beweis des Satzes benutzt zwei Hilfssätze, die wir für den Euklidischen Fall formulieren. Die Übertragung auf beliebige V.R. ist trivial.

Lemma 1 :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, $a \in U$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(a) \subset U$ und

$$\Big|f(x) - f(y)\Big| \leq \Big(\|f'(a)\| + \varepsilon\Big)\ |x - y| \quad \leftarrow \text{(lokale Lipschitz Bedingung bei } a\text{)}$$

für alle $x,\ y \in B_\delta(a)$. $\quad$ ($|\cdot|$ = Eukl. Norm, $\|\cdot\|$ = Operatornorm)

Beweis :

f' ist stetig $\Longrightarrow$ zu $\varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ mit $\Big\| f'(x) - f'(a) \Big\| < \varepsilon$ für $x \in B_\delta(a) \subset U$.

Seien $x,\ y \in B_\delta(a) \quad \Longrightarrow \quad$ ("Hauptsatztrick")

$$\begin{aligned}
\Big| f(y) - f(x) \Big| &= \Big| \int_0^1 \frac{d}{dt} f\Big(x + t(y-x)\Big)\, dt \Big| \\
&= \Big| \int_0^1 f'\Big(x + t(y-x)\Big)(y-x)\, dt \Big| \\
&\leq \int_0^1 \Big\| f'(x + t(y-x)) \Big\|\, dt \cdot |y - x| \\
&\leq \Big\| f'(a) \Big\| \cdot |y - x| + \int_0^1 \underbrace{\Big\| f'(x + t(y-x)) - f'(a) \Big\|}_{\leq\, \varepsilon,\ \text{da}\ x+t(y-x)\in B_\delta(a)} dt \cdot |y - x|
\end{aligned}$$

□

Lemma 2 :

Die Voraussetzungen von Lemma 1 seien erfüllt mit $\boxed{m = n}$, es gelte noch $\det f'(a) \neq 0$. Dann folgt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\Big| f(x) - f(y) \Big| \geq (\alpha - \varepsilon)|x - y| \quad \forall\, x, y \in B_\delta(a) \text{ mit } \alpha := \frac{1}{\|f'(a)^{-1}\|}.$$

Bemerkung :

$f'(a)$ ist invertierbar, also $1\Big/\|f'(a)^{-1}\|$ definiert.

Beweis :

Sei $g(x) = f(x) - f'(a)(x) \implies g'(a) = 0$;
benutze Lemma 1 für g:

$$\Big| g(x) - g(y) \Big| \leq \varepsilon\ |x - y|,\ x,\ y \in B_\delta(y)$$

also :

$$\begin{aligned}
f(x) - f(y) &= f'(a)(x-y) + \Big(g(x) - g(y)\Big) \\
\Longrightarrow \Big| f(x) - f(y) \Big| &\geq \Big| f'(a)(x-y) \Big| - \varepsilon|x - y| \quad (+)
\end{aligned}$$

nun beachte :

$$\begin{aligned} |x-y| &= \left| f'(a)^{-1}\Big(f'(a)(x-y)\Big)\right| \\ &\leq \left\| f'(a)^{-1}\right\| \cdot \left| f'(a)(x-y)\right| \\ \Longrightarrow \quad \left| f'(a)(x-a)\right| &\geq \alpha \cdot |x-y| \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Beh. mit (+)

$\square$

Beweis von Satz 21.1 :

O.E. $\quad X = Y = \mathbb{R}^n,\ a \in U$ mit $\det f'(a) \neq 0$

<u>1. Schritt</u> : Ïnjektivität von f auf Umgebung von a”

definiere wie in Lemma 2: $\alpha := \frac{1}{\|f'(a)^{-1}\|}$ und wähle $\boxed{\varepsilon := \alpha/2}$

$$\text{setze } \Omega := B_\delta(a) \Longrightarrow \left| f(x_1) - f(x_2)\right| \geq \frac{\alpha}{2}\, |x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in \Omega,$$

d.h. $\quad f|_\Omega$ ist <u>injektiv</u>.

<u>2. Schritt</u> : zeige $\quad V := f(\Omega)$ ist <u>offen</u>

wähle dazu $y_1 := f(x_1) \in V,\ x_1 \in \Omega,$ und betrachte eine Kugel $B_\delta(x_1)$ um x_1 mit $\overline{B_{\delta_1}}(x_1) \subset \Omega$

$\overline{B_{\delta_1}}(x_1) = \Omega_1$

a

Ω

setze $\quad \Omega_1 := B_{\delta_1}\ (x_1)$

$\Longrightarrow$ $f(\partial\Omega_1)$ kompakt und $y_1 \notin f(\partial\Omega_1)$ wegen der Injektivität von f.

$\Longrightarrow$ $\sigma :=$ dist $(y_1, f(\partial\Omega_1) > 0$

$f(\partial\Omega_1)$

y_1

σ

<u>**Behauptung**</u> **:** Es existiert eine Kugel um y_1 in V $(*)$

Wir zeigen: $B_{\sigma^*}(y_1) \subset V = f(\Omega)$ mit $\sigma^* := \frac{1}{2}\sigma$ (genauer: $B_{\sigma^*}(y_1) \subset f(\Omega_1)$)

$(*)$ heißt: zu $y \in B_{\sigma^*}(y_1)$ findet man $x_2 \in \Omega$ mit $f(x_2) = y$

Für $y \in B_{\sigma^*}(y_1)$ und $x \in \partial\Omega_i$ ist

$$\Big|y - f(x)\Big| \geq -|y - y_1| + \Big|f(x) - y_1\Big| \geq \operatorname{dist}\Big(f(\partial\Omega_1), y_1\Big) - \sigma^* = \sigma - \sigma^* = \frac{\sigma}{2}\ .$$

Wir definieren die Hilfsfunktion (bei festem $y \in B_{\sigma^*}(y_1)$)

$$\Psi(x) := \Big|f(x) - y\Big|^2,\ x \in \overline{\Omega_1}.$$

Es gilt :

$$\Psi \in C^1(\Omega_1) \cap C^0(\Omega_1),\ \ \Psi \geq \frac{\sigma^2}{4} \text{ auf } \partial\Omega_1,\ \ \Psi \text{ besitzt ein Minimum;}$$

gemäß (beachte die Wahl von y !)

$$\Psi(x_1) = \Big|f(x_1) - y\Big|^2 = \Big|y_1 - y\Big|^2 \overset{y \in B_{\sigma^*}(y_1)}{<} (\sigma^*)^2 = \frac{\sigma^2}{4} \leq \text{ Werte von } \Psi \text{ auf } \partial\Omega_1$$

kann dieses Minimum nicht auf $\partial\Omega_1$ liegen, es gibt einen *inneren* Punkt $x_2 \in \Omega_1$ in dem Ψ minimal wird, d.h.

$$\nabla\Psi(x_2) = 0 \iff f'(x_2)\Big(y - f(x_2)\Big) = 0$$

Laut Vor. ist $\det f'(a) \neq 0$; $f \in C^1$ garantiert $\det f'(x) \neq 0$ **für x nahe bei a**, d.h. wir können O.E. $\det f' \neq 0$ auf Ω annehmen. Speziell ist dann $f'(x_2)$ regulär und aus $f'(x_2)(y - f(x_2)) = 0$ folgt $y = f(x_2)$, womit $(*)$ bewiesen ist.

<u>**3. Schritt**</u> **:** $g := \Big(f|_\Omega\Big)^{-1} : V \to \Omega$ ist C^ℓ

Sei $y_\circ = f(x_\circ)$ ein Punkt aus V, $x_\circ \in \Omega$. Da f in $x_\circ$ diff'bar ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $B_r(x_\circ)$ von $x_\circ$ mit

$$\frac{1}{|x - x_\circ|}\ \Big|f(x) - f(x_\circ) - f'(x_\circ)(x - x_\circ)\Big| \ \leq\ \frac{\varepsilon \cdot \alpha}{2\|f'(x_\circ)^{-1}\|} \quad (1)$$

für $x \in B_r(x_\circ)$, wobei wir $\Omega = B_\delta(a)$ wie schon vorher so klein machen, dass $f'(x_\circ)$ invertierbar ist. Es gilt wie früher:

$$\alpha := \frac{1}{\|f'(a)^{-1}\|} \ .$$

Natürlich ist auch $f\Big(B_r(x_\circ)\Big)$ offen (Begründung wie im 2^{ten} Schritt), also gibt es eine Kugel $B_R(y_\circ) \ \subset \ f\Big(B_r(x_\circ)\Big)$.
Nach Schritt 1 gilt :

$$\Big| f(x) - \underbrace{y_\circ}_{=f(x_\circ)} \Big| \ \geq \ \frac{\alpha}{2} \, |x - x_\circ| \quad \forall \, x \in B_r(x_\circ) \ . \qquad (2)$$

Andererseits ist für $y = f(x) \in B_R(y_\circ) \ \Big(\Longrightarrow \ x \in B_r(x_\circ)\Big)$

$$\begin{aligned} & g(y) - g(y_\circ) - f'(x_\circ)^{-1}(y - y_\circ) \\ = \ & x - x_\circ - f'(x_\circ)^{-1}\Big(f(x) - f(x_\circ)\Big) \\ = \ & -f'(x_\circ)^{-1}\Big\{f(x) - f(x_\circ) - f'(x_\circ)(x - x_\circ)\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \qquad & |g(y) - g(y_\circ) - f'(x_\circ)^{-1}(y - y_\circ)| \\ \leq \ & \|f'(x_\circ)^{-1}\| \ \cdot \ |f(x) - f(x_\circ) - f'(x_\circ)(x - x_\circ)| \\ \overset{(1)}{\leq} \ & \tfrac{1}{2} \, \varepsilon \cdot \alpha \, |x - x_\circ| \\ \overset{(2)}{\leq} \ & \varepsilon \, |f(x) - y_\circ| \\ = \ & \varepsilon \cdot |y - y_\circ| \ . \end{aligned}$$

Also ist g diff'bar in $y_\circ$ mit $g'(y_\circ) = f'(x_\circ)^{-1}$.
Alle weiteren Aussagen ergeben sich nun aus der Formel

$$g' = \Big(f' \circ g\Big)^{-1}$$

unter Beachtung der folgenden Tatsachen :

1) f' und g sind stetig $\Longrightarrow$ $f' \circ g$ ist stetig
2) Die Menge $\{A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \det A \neq 0\} =: \mathcal{R}$ ist offen in $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und die *Inversion*

$$I(A) := A^{-1}$$

ist stetige Abbildung $\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$.

Wegen $g' = I \circ f' \circ g$ folgt Stetigkeit von g', also $g \in C^1(V,\Omega)$. Ist $f \in C^2$, so ist $f' \circ f \in C^1$; die Abbildung I ist C^∞ (da $I(a)$ = rat. Funktion in den Koeff. von A), also ist $g' \in C^1$ (nach Formel), d.h. $g \in C^2(V,\Omega)$. Weiter schließt man induktiv.

□

Korollar : (Satz von der offenen Abbildung)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1. $f'(x)$ sei für alle Punkte $x \in U$ invertierbar. Dann ist f eine offene Abbildung, d.h. für offene Mengen $A \subset U$ ist $f(A)$ offen. Ist f zudem injektiv, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(U) \to U$ stetig differnzierbar.

Beweis :

Sei $U' \subset U$ offen, $y_\circ \in f(U')$, also $y_\circ = f(x_\circ)$ für ein $x_\circ \in U'$. Man wende den Satz an auf $\tilde{f} : U' \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{f} := f|_{U'}$:
Nach dem 2ten Beweisschritt gibt es eine Kugel $B_r(x_\circ)$ die in U' enthalten ist, so dass $f(B_r(x_\circ))$ eine offene Menge ist.
Also ist $f\Big(B_r(x_\circ)\Big)$ offene Umgebung von $y_\circ$ in $f(U')$, also $f(U')$ offen.
Die 2te Aussage ist klar.

□

Definition 21.1 :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

a) $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt **regulär**, *wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*
  - *i)* $f \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$
  - *ii) f injektiv*
  - *iii)* $\det f'(x) \neq 0$ *ist für alle* $x \in U$.

b) Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt ein **Diffeomorphismus von U auf V**, *wenn f regulär ist mit Bild $f = V$.*
(Diffeom. der Klasse $C^k \Longleftrightarrow f$ Diffeom. und $f \in C^k$)

Bemerkungen :

1) f regulär $\overset{\text{KOR}}{\Longrightarrow}$ $f(U)$ offen, also f Diffeomorphismus von U auf $f(U)$.
2) f regulär $\overset{\text{Satz 21.1}}{\Longrightarrow}$ f^{-1} regulär.
3) wir haben gesehen:

$$\left\{\begin{array}{l} f \in C^1(U, \mathbb{R}^n),\ \det f'(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in U \implies \\ \text{jeder Punkt } x \text{ hat eine Umgebung, auf der f injektiv ist ("lokale Injektivität"),} \end{array}\right.$$

<u>Das reicht natürlich nicht, um auf Injektivität zu schließen</u> ! (d.h. f muß nicht regulär sein !)

Beispiel :

$f(x, y) = e^x\ (\cos y, \sin y),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$

(Bild $f = ?$)

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \implies \det f'(x, y) = e^{2x} > 0 \quad \text{überall}$$

Dagegen ist $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$, also f nicht <u>(global)</u> injektiv.

□

$\longrightarrow$ Übungen: weitere Beispiele!

Implizite Funktionen

ist ein Stichwort, das eine Methode zur *Lösung nichtlinearer Gleichungen* beschreibt.
(genauer: Methode zur Beschreibung der Lösungsmenge)

Situation :

$U \subset \mathbb{R}^n$ *offen* $f : U \to \mathbb{R}^m$ mit $m < n$; sei $x_\circ \in U$ mit $f(x_\circ) = y_\circ \in \mathbb{R}^m$.
Die Gleichung hat i.a. <u>nicht nur</u> die Lösung $x_\circ$.

Frage :

Wie sieht die Lösungsmenge $\{x \in U : f(x) = y_\circ\}$ aus ?

Beispiele :

i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ <u>linear</u>, $f(x,y) := ax + by,\ a, b \in \mathbb{R}$,
$N_f := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\Big\}$? (*Nullstellenmenge von* f)

<u>Fall 1</u> : $f \equiv 0 \implies N_f = \mathbb{R}^2$

<u>Fall 2</u> : $f \not\equiv 0 \implies N_f = \text{Kern } f$ hat $\dim 1$

Sei O.E. $b \neq 0 : (x,y) \in N_f \iff y = -\frac{a}{b}\, x$

D.h.: N_f *ist Graph von* $x \mapsto -\frac{a}{b}\, x$

<u>M.a.W.</u> :

Wir haben die Gleichung $f(x,y) = 0$ "**nach y aufgelöst**", d.h. $y = y(x)$ *als Funktion von* x *geschrieben*, was unter der Voraussetzung $\frac{\partial f}{\partial y} = b \neq 0$ möglich ist.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := x^2 + y^2$
Struktur von $\Big\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 1\Big\}$?
Es handelt sich um **1 - Kreislinie** um $(0,0)$. Offenbar:

$$f(x,y) = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \pm\sqrt{1-y^2} \quad \text{bzw.} \quad y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

y

x

$(1,0)$

Der Punkt $(1,0)$ gehört zur Menge. In der Nähe von $(1,0)$ kann man **nicht nach** y auflösen, also die Niveaumenge als Graph von $y = y(x)$ schreiben, da zu $x < 1$ stets zwei y-Werte gehören. Man sieht allerdings unschwer, dass der schraffierte Bereich gegeben ist durch $\left\{\left(\sqrt{1-y^2},\ y\right) : -1 \leq y \leq 1\right\}$.

Wir haben hier also noch die Möglichkeit, *lokal bei* $(1,0)$ x *als Funktion von* y *zu schreiben*, d. h. die Niveaulinie ist bis auf Drehung wieder Graph einer Funktion.

Beobachtung: $\frac{\partial f}{\partial x}\ (1,0) = 2,\ \frac{\partial f}{\partial y}\ (1,0) = 0$
die Ableitung nach x ist bei $(1,0)$ von 0 verschieden, und man hat bei $(1,0)$ die **eindeutige** Darstellung $(x(y), y)$ für Punkte auf der Niveaulinie.
(Vermutung: $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0 \rightsquigarrow x = x(y);\quad \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0 \rightsquigarrow y = y(x)$)

Satz 21.2 : (Satz über implizite Funktionen)

Seien $\boxed{n > m}$, *U offen im* $\mathbb{R}^n$ *und* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *von der Klasse* C^1. $x_\circ$ *sei aus* U *mit* $f(x_\circ) = 0$, *und* $f'(x_\circ) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *habe maximalen Rand m.*
O.E. seien die letzten m *Spaltenvektoren von*

$$f'(x_\circ) = \left.\begin{pmatrix} \partial_1 f^1 \ldots\ldots & \boxed{\begin{matrix} \partial_{n-m+1} f^1 & \ldots\ldots & \partial_n f^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n-m+1} f^m & \ldots\ldots & \partial_n f^m \end{matrix}} \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \partial_1 f^m \ldots\ldots & \end{pmatrix}\right\} m$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n-m}\quad\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{m},$$

d.h.: die Ableitungen von f *nach den letzten* m *Variablen sind linear unabhängig.*
Somit gilt: $\det \Box \neq 0$.
Sei $k := n - m$, *und für* $x \in \mathbb{R}^n$ *sei* $\hat{x} := (x_1, \ldots, x_{n-m}) = (x_1, \ldots, x_k)$. *Dann gibt es eine offene Umgebung* V *von* $x_\circ$ *in* U, *eine offene Umgebung* D *von* $\hat{x}_\circ$ *in* $\mathbb{R}^k$, *sowie* $\varphi \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ *mit*

$$\text{(1)}\qquad \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ k+1\leq j\leq n}} \neq 0 \ \textit{auf}\ V$$

und

$$\text{(2)}\qquad \left\{x \in V : f(x) = 0\right\} = \textit{graph}(\varphi) = \left\{(\hat{x}, \varphi(\hat{x})) : \hat{x} \in D\right\}.$$

$\Box$

$\mathbb{R}^m$

$\{x : f(x) = 0\}$

$x_\circ$ V

$\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{n-m}$

D

Die Nullstellenmenge von f ist *lokal bei* $x_\circ$ als Graph *über* $D \subset \mathbb{R}^k$ geschrieben: für $x \in$ Nullstellenmenge nahe $x_\circ$ gilt

$$\begin{cases} x_{n-m+1} & = & x_{n-m+1} & (x_1, \dots, x_{n-m}) \\ \vdots & & & \\ x_n & = & x_n & (x_1, \dots, x_{n-m}) \end{cases}$$

Bemerkung :

ausführliche Diskussion in Spezialfällen nach dem folgenden Beweis

Beweis von Satz 21.2 :

Bedingung (1) gilt für $x_\circ \overset{f \in C^1}{\Longrightarrow} \exists$ Umg. $U' \subset U$ von $x_\circ$ mit (1) auf U' ;
sei für $x \in U'$

$$F^i(x) := \left\{ \begin{array}{ll} x^i & , \quad 1 \le i \le k = n - m \\ f^{i-k}(x) & , \quad k+1 \le i \le n \end{array} \right\} , \quad i = 1, \dots, n,$$

Also: $F : U' \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad F(x) := \Big(x_1, \dots, x_k, f^1(x), \dots, f^m(x)\Big) = \Big(\hat{x}, f(x)\Big)$

$\Longrightarrow \ F \in C^1(U', \mathbb{R}^n)$ mit

$$F'(x) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \partial_1 f^1 & \dots & \partial_k f^1 & \partial_{k+1} f^1 & \dots & \partial_n f^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^m & \dots & \partial_k f^m & \partial_{k+1} f^m & \dots & \partial_n f^m \end{array} \right) & \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}}\right\} m \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\hphantom{\partial_1 f^m \ \dots \ \partial_k f^m}}_{k} & \underbrace{\hphantom{\partial_{k+1} f^m \ \dots \ \partial_n f^m}}_{m} \end{array} & \end{array}$$

Lagrange'scher Entwicklungssatz ("Kästchensatz")

$$\Longrightarrow \det F'(x) \; = \; 1 \cdot \det \begin{pmatrix} \partial_{k+1} f^1 & \dots & \partial_n f^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{k+1} f^m & \dots & \partial_n f^m \end{pmatrix} (x) \; \neq \; 0$$

nach Wahl der Umgebung U' von $x_\circ$;

Satz 21.1 $\Longrightarrow \exists$ offene Umg. V von $x_\circ \subset U'$, so dass $F(V) \subset \mathbb{R}^n$ *offen* ist;
$G := (F|_V)^{-1}$ gehört zur Klasse $C^1(F(V), V)$.

Sei $D := \Big\{ \hat{x} \in \mathbb{R}^k : \; (\hat{x}, 0) \in F(V) \Big\}$

beachte :

a) $f(x_\circ) = 0 \implies F(x_\circ) = (\hat{x}_\circ, f(x_\circ)) = (\hat{x}_\circ, 0)$,
d.h. $(\hat{x}_\circ, 0) \in F(V)$, also $\hat{x}_\circ \in D$

b) $F(V)$ offen in $\mathbb{R}^n \implies D$ offen in $\mathbb{R}^k$

zusammen: $\underline{D = \text{ offene Umgebung von } \hat{x}_\circ \text{ in } \mathbb{R}^k}$.

Weiter gilt folgende Kette von Äquivalenzen:

$$(x \in V) \; f(x) = 0 \iff F(x) = (\hat{x}, 0) \iff \hat{x} \in D \text{ und } \underbrace{x = G\Big(F(x)\Big) = G(\hat{x}, 0)}_{(*)}$$

Setze also :

$$\varphi(\hat{x}) := \underbrace{\Big(G^{k+1}(\hat{x}, 0), \dots, G^n(\hat{x}, 0)\Big)}_{\in \mathbb{R}^m}.$$

Dann gilt :

$$(*) \iff x = \Big(\hat{x}, \varphi(\hat{x})\Big),$$

womit

$$\Big\{ x \in V : \; f(x) = 0 \Big\} = \Big\{ \Big(\hat{x}, \varphi(\hat{x})\Big) : \; \hat{x} \in D \Big\}$$

bewiesen ist.

□

Bemerkungen zu Satz 21.1 :

1) $f \in C^\ell$ mit $\ell \geq 1 \implies$ Auflösungsfunktion $\varphi \in C^\ell$

2) $f(x_\circ) = \eta$ mit $\eta \in \mathbb{R}^m$ beliebig $\implies$ die Niveaumenge $(x:\ f(x) = \eta)$ kann entsprechend bei

   $x_\circ$ lokal dargestellt werden (klar: betrachte $f - \eta$).

3) Seien irgendwelche m Spalten von $f'(x_\circ)$ linear unabhängig, also z.B.

$$\det \Big(\frac{\partial f^i}{\partial x_{\alpha_j}}\Big)_{1\leq i,j\leq m} (x_\circ) \neq 0 \quad \text{für} 1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_m \leq n.$$

   Dann gilt :

   es gibt eine Umgebung V von $x_\circ$ in U und Fkten λ^j mit

$$\Big\{x \in V:\ f(x) = 0\Big\} = \Big\{x \in V:\ x_{\alpha_j} = \lambda^j\,(\tilde{x}),\ j = 1,\ldots,m\Big\},$$

   wobei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-m}$ die Variablen mit Index $\neq \alpha_j$ zusammenfaßt.

   Indem man in $\mathbb{R}^n$ eine geeignete Variablentransformation vornimmt, kann man stets die Situation des Satzes herstellen. Die Transformation besteht darin, die Variablen umzunummerieren.

4) Die im Satz vorkommende Funktion heißt "implizit definiert", da sie durch die Eigenschaft

$$(*) \quad f\Big(\hat{x}, \varphi(\hat{x})\Big) \ = \ 0,\ \hat{x} \in D,$$

   festgelegt wird. Auch wenn man sie *nicht* kennt, kann man ihre Ableitung ausrechnen:

   Die Kettenregel ergibt aus $(*)$

$$0 = f'\Big(\hat{x}, \varphi(\hat{x})\Big) \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 \\ \partial_1\varphi^1 & \ldots & \ldots & \partial_k\varphi^1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1\varphi^m & \ldots & \ldots & \partial_k\varphi^m \end{pmatrix} (\hat{x}) \quad \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} n - m = k$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 f^1 & \ldots & \partial_n f^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f^m & \ldots & \partial_n f^m \end{pmatrix} \Big(\hat{x}, \varphi(\hat{x})\Big) \ \circ \ (-\ '' \ -)$$

$$= \Big(\partial_j f^i\,(\ldots) + \sum_{\ell=n-m+1}^{n} \partial_\ell f^i\ (\ldots) \cdot \partial_j \varphi^{\ell+m-n}\ (\hat{x})\Big)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ J=1,\ldots,k}}$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$\sum_{\ell=n-m+1}^{n} \partial_\ell f^i\Big(\hat{x}, \varphi(\hat{x})\Big)\, \partial_j \varphi^{\ell+m-n}(\hat{x}) = -\partial_j f^i(\hat{x}), \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, k$$

Vermöge der im Satz verlangten "Rangbedingung" kann man dieses System nach den Ableitungen von φ auflösen ($\rightarrow$ vgl. Spezialfall $m = 1$)

5) Spezialfall $m = 1$:

$$f : U \rightarrow \mathbb{R},\ U \subset \mathbb{R}^n,\ \text{sei } C^1;\ x_\circ \in U \text{ mit } f(x_\circ) = 0$$

$$\text{Randbedingung} \iff \nabla f(x_\circ) \neq 0 \iff \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} : \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_\circ) \neq 0$$

Dann sagt Satz 21.1 :

$\exists$ Umgebung V von $x_\circ$ in $\mathbb{R}^n$,

$\exists$ Umgebung C von $(x_\circ^1, \ldots, x_\circ^{i-1}, x_\circ^{i+1}, \ldots, x_\circ^n)$ in $\mathbb{R}^{n-1}$,

$\exists$ C^1-Abbildung $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\Big\{x \in V : f(x) = 0\Big\}$$
$$= \Big\{\Big(x_1, \ldots, x_{i-1}, \underbrace{\varphi(x_1, \ldots, \cancel{x_i}, \ldots, x_n)}_{i\text{te Stelle}}, x_{i+1}, \ldots, x_n\Big) : \Big(x_1, \ldots, \cancel{x_i}, \ldots, x_n\Big) \text{ in } D\Big\}$$

$\cancel{x_1}$ heißt: die Variable x_i kommt nicht vor.

Im Satz ist $i = n$ angenommen. Dann lautet das Ergebnis:

$$\boxed{N_f \cap V = \Big\{\Big(x_1, \ldots, x_{n-1},\ \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})\Big) : (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D\Big\}}$$

$$\Big(N_f = \Big\{x \in U : f(x) = 0\Big\} \quad \text{Nullstellenmenge von } f\Big).$$

Für $i = n$ hat man also die Graphensituation $x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ für andere i gilt dies erst nach einer orthogonalen Transformation.

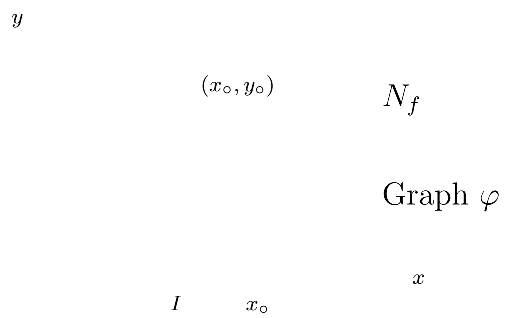
Wir berechnen nochmals die Ableitung der impliziten Funktion φ im Fall $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_\circ) \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
0 &= f\Big(x_1,\dots,x_{n-1},\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})\Big) \quad \Longrightarrow \quad (\ell = 1,\dots,n)\\
0 &= \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\dots)\\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(x_1,\dots,x_{n-1},\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})\Big)\\
&\quad \cdot \frac{\partial}{\partial x_\ell}\Big(j^{\text{te}} \text{ Komponente von } \Big(x_1,\dots,x_{n-1},\varphi\,(x_1,\dots,x_{n-1})\Big)\\
&= \frac{\partial f}{\partial x_n}(\dots)\cdot\frac{\partial}{\partial x_\ell}\varphi(x_1,\dots,x_{n-1}) + \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\dots)\\
\Longrightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial x_\ell}\varphi(x_1,\dots,x_{n-1}) = -\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big(x_1,\dots,x_{n-1},\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})\Big)^{-1}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\dots),\\
& \ell = 1,\dots,n-1. \qquad \text{“ partiell Dgl. für } \varphi \text{ ”}
\end{aligned}
$$

6) <u>noch spezieller</u> : <u>$n=2,\ m=1$</u>

$f : \mathbb{R}^2 \supset U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei C^1 mit $f(x_\circ, y_\circ) = 0$ für ein $(x_\circ, y_\circ) \in U$.

<u>**Fall 1 :**</u> $\frac{\partial f}{\partial y}\,(x_\circ, y_\circ) \neq 0$

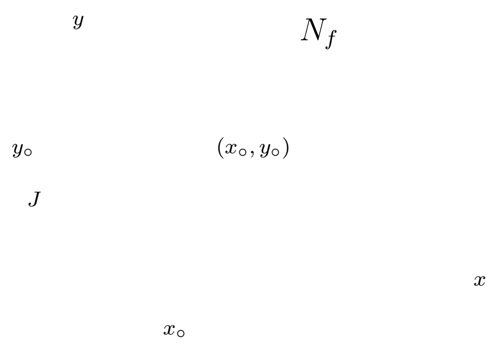


$$
\Longrightarrow \quad \begin{cases} \Big\{(x,y)\in U:\ f(x,y)=0\Big\} \cap \text{ Umgebung von } (x_\circ,y_\circ)\\ = \text{ Graph von } \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R},\ I = \text{Intervall um } x_\circ \end{cases}
$$

dann gilt :

$$
\begin{aligned}
& f\Big(t,\varphi(t)\Big) = 0 \text{ auf } I\\
\Longrightarrow \quad & 0 = \tfrac{d}{dt} f\Big(t,\varphi(t)\Big) = \tfrac{\partial f}{\partial x}\Big(t,\varphi(t)\Big) + \varphi'(t)\tfrac{\partial f}{\partial y}\Big(t,\varphi(t)\Big)\\
\Longrightarrow \quad & \boxed{\varphi'(t) = -\tfrac{\partial_x f}{\partial_y f}\Big(t,\varphi(t)\Big)}\ ,\ t\in I
\end{aligned}
$$

<u>Fall 2</u> : $\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_\circ, y_\circ) \;\neq\; 0$



$\Longrightarrow N_f \cap$ Umgebung von $(x_\circ, y_\circ) = \Big\{(\Psi(t),\, t):\; t \in J\Big\}$

hier kann man N_f bei $(x_\circ, y_\circ)$ <u>nicht</u> als Graph über der x-Achse schreiben, N_f ist Graph über der y-Achse

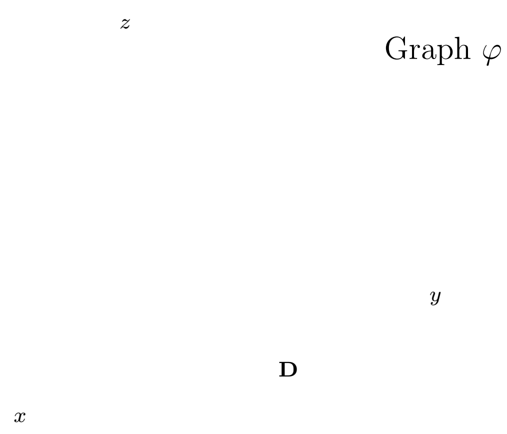
$$\Psi'(t) = -\frac{\partial_y f}{\partial_x f}\Big(\Psi(t), t\Big).$$

Man beachte :

- die Gleichungen $\varphi' = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}(\cdot, \varphi)$ bzw. $\Psi' = -\frac{\partial_y f}{\partial_x f}(\Psi, \cdot)$ sind $\longrightarrow$ <u>gewöhnliche Differentialgleichungen</u> für φ bzw. Ψ
- gemäß N_f = Graph φ bzw. $N_f = \Big\{\Big(\Psi(t), t\Big) :\; t \in J\Big\}$ lokal bei $(x_\circ, y_\circ)$ ist N_f <u>eine glatte Kurve zumindest in der Nähe von $(x_\circ, y_\circ)$</u>.

7) <u>ebenfalls speziell</u> : <u>$m = 1,\; n = 3$</u> (Flächen in $\mathbb{R}^3$)

jetzt: $f\,(x_\circ, y_\circ, z_\circ) = 0$ für einen Punkt $(x_\circ, y_\circ, z_\circ) \in U$



$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_\circ, y_\circ, z_\circ) \neq 0 \implies \begin{cases} N_f \cap \text{ Umg. von } (x_\circ, y_\circ, z_\circ) = \Big\{ \Big(x, y, \varphi(x,y)\Big) : (x,y) \in D \Big\}, \\ D = \text{ Umg. von } (x_\circ, y_\circ) \subset \mathbb{R}^2, \ \varphi : D \to \mathbb{R} \end{cases}$$

N_f = Flächenstück (Graph φ) lokal bei $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$

8) wichtig für Anwendungen : $n = 3, \ m = 2$ (Kurven in $\mathbb{R}^3$)

Sei $F = (f, g) : \mathbb{R}^3 \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ F(x_\circ, y_\circ, z_\circ) = (0, 0)$, dann ist

$(*)$ $F(x, y, z) = (0, 0)$ Gleichungssystem in 3 Variablen

Vorstellung :

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,z) = 0 \text{ beschreibt Fläche 1} \\ g(x,y,z) = 0 \text{ beschreibt Fläche 2} \end{array}\right\} \implies (*) \text{ ist Schnitt der Flächen, also eine Kurve.}$$

Genauer :

F' habe in $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ maximalen Rang, etwa

$$\det \begin{pmatrix} \partial_y f & \partial_z f \\ \partial_y g & \partial_z g \end{pmatrix} (x_\circ, y_\circ, z_\circ) \ \neq \ 0$$

$\implies$ es gibt eine Funktion $I \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ t \longrightarrow \Big(\varphi(t), \Phi(t)\Big), \ I$ = Intervall um $x_\circ$, mit

$$N_F \cap \text{ Umg. von } (x_\circ, y_\circ, z_\circ) = \Big\{ \Big(t, \varphi(t), \Phi(t)\Big) : \ t \in I \Big\}$$

$\Gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ \Gamma(t) := (t, \varphi(t), \Phi(t)\Big),$

ist eine reguläre Raumkurve, denn $\Gamma'(t) = \Big(1, \varphi'(t), \Phi'(t)\Big) \neq 0.$

In den Fällen $\det \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_z f \\ \partial_x g & \partial_z g \end{pmatrix} (x_\circ, y_\circ, z_\circ) \ \neq \ 0, \ldots\ldots$ gelten analoge Ergebnisse.

$\square$

$\longrightarrow$ Übungen : weitere Beispiele !

Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$

lassen sich gut mit dem impliziten Funktionensatz beschreiben.

Definition 21.2 :

Seien $1 \leq k < n$, $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ *und* $\ell \in \mathbb{N}$.
M heißt **k-dim. Untermannigfaltigkeit der Klasse $\mathbf{C}^\ell$** *von* $\mathbb{R}^n$*, falls gilt :*
Zu jedem $x_\circ \in M$ *gibt es eine (in* $\mathbb{R}^n$*) offene Umgebung* U *von* $x_\circ$ *und eine Abbildung* $\Phi \in C^\ell(U, \mathbb{R}^{n-k})$*, so dass*

(i) *Rang* $D\Phi \equiv n - k$ *auf* U
(ii) $M \cap U = \{x \in U : \ \Phi(x) \equiv 0\}$.

U M

$x_\circ$

Spezialfall :

Sei $\underline{k = n - 1}$, $\Phi \in C^\ell(U, \mathbb{R})$ und die Rangbedingung bedeutet: $\nabla\Phi \neq 0$.
$(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeiten heißen auch Hyperflächen.

Beispiel :

$M = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| = 1\Big\}, \ n \geq 2$

$\underbrace{\Phi(x) := |x|^2 - 1}_{\in C^\infty}$; $\nabla\Phi(x) = 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$, welches nicht zu M gehört

also :

Rang $D\Phi = 1$ auf $M \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{M \text{ ist Hyperfläche}} \text{ in } \mathbb{R}^n\text{, nämlich die Oberfläche (der Rand)} \\ \text{der Einheitskugel bzgl. der Euklidischen Metrik.} \end{array} \right.$

Bemerkung zu Def. 21.2 :

1) es wird *nicht* verlangt, dass man global mit *einer* Abbildung Φ auskommt.
2) man nennt 21.1 die implizite Def. einer Mannigfaltigkeit :

   sei $x_\circ \in M$, wähle $U,\ \Phi$ wie in der Def., nach Vertauschung der Variablen in $\mathbb{R}^n$ kann man erreichen:

$$\det \begin{pmatrix} \partial_{k+1}\Phi^1 & \dots & \partial_n \Phi^1 \\ \vdots & & \\ \partial_{k+1}\Phi^{n-k} & \dots & \partial_n \Phi^{n-k} \end{pmatrix} (x_\circ) \neq 0$$

$$\overset{\text{Satz 21.1}}{\Longrightarrow} \begin{cases} \exists \text{ Umg. } U' \text{ von } x_\circ \text{ in } \mathbb{R}^n \text{ und eine Umg. } W \text{ von } \hat{x}_\circ = (x_0^1, \dots, x_0^k) \ \underline{\text{in } \mathbb{R}^k}, \\ \text{sowie eine Funktion } f: \ W \to \mathbb{R}^{n-k} \end{cases}$$

$$M \ \cap U' = \Big\{ \Big(\hat{x}, f(\hat{x}) \Big) : \ \hat{x} \in W \Big\} = \ \text{Graph } f, \ \text{Projektion}_{\mathbb{R}^k} \ (M \cap U') = W$$

$\mathbb{R}^{n-k}$

U' M

$x_\circ$

$\hat{x}_\circ$ W $\mathbb{R}^k$

M.a.W. :

M ist k-dimensionale Mannigfaltigkeit $\subset \mathbb{R}^n$

$$\Updownarrow$$

M ist lokal, bis auf Spiegelungen in $\mathbb{R}^n$,
Graph von Funktionen $\mathbb{R}^k \supset D \xrightarrow{c^\ell} \mathbb{R}^{n-k}, \ D$ offen

Beispiel :

$n = 2, \ f(x,y) = x^2 - y^2$

Setze $M_c := \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c \Big\}, \ c \in \mathbb{R}$

y M_c y M_c

x $-\sqrt{c}$ $\sqrt{c} > 0$ x

$c = 0$ für $c > 0$

$M_\circ$ = Schnitt der beiden Winkelhalbierenden,

bei $(0,0)$ ist die Rangbedingung verletzt $(\nabla f(0,0) = (0,0))$

$\Longrightarrow$ $M_\circ$ keine Mannigfaltigkeit;

Sei $c > 0$, für $(x, y) \in M_c$ ist $\nabla f(x, y) = 2(x, -y) \neq (0,0)$, da $(0,0) \notin M_c$

$\Longrightarrow$ Rang $f' \equiv 1$ auf M_c, M_c ist 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.

□

Weitere Beispiele ergeben sich aus der folgenden alternativen Beschreibung für die wir den Begriff der **regulären Abbildung** etwas erweitern müssen.

Definition 21.1* :

Seien $k \leq n$ sowie W offen in $\mathbb{R}^k$. Eine Abbildung $\varphi : W \to \mathbb{R}^n$ der Klasse C^1 heißt **reguläre Abbildung**, falls gilt :

(i) φ ist injektiv

(ii) Rang $D\varphi \equiv k$

(iii) $\varphi^{-1} : \varphi(W) \to W$ ist stetig

Bemerkungen :

1) Für $k = n$ ist iii) automatisch richtig, dann ist $\varphi(W)$ offen und $\varphi^{-1} \in C^1$ (nach Umkehrsatz).

2) Natürlich kann man auch φ der Klasse $C^\ell, \ell > 1$, betrachten.

Satz 21.3 : (Beschreibung von Mannigfaltigkeiten)

Seien $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n,\ 1 \leq k < n$ *und* $\ell \in \mathbb{N}$. *Dann sind äquivalent :*

(i) M *ist* k*-dim. Untermannigfaltigkeit der Klasse* C^ℓ

(ii) *(Reguläre Parametrisierungen)*
Zu jedem $x_\circ \in M$ *gibt es eine Umgebung* $U \subset \mathbb{R}^n$, *eine Umgebung* V *von* 0 *in* $\mathbb{R}^k$ *und eine reguläre Abbildung* $\Phi : V \xrightarrow{C^\ell} U$ *mit* $M \cap U = \Phi(V)$.

U $\mathbb{R}^n$

Φ M

$x_\circ$

$\mathbb{R}^k$

0 V

Man nennt Φ *eine* **lokale Parametrisierung** *oder eine* **lokale Karte** *von* M *bei* $x_\circ$. *Eine* k*-dim. Mannigfaltigkeit entsteht also durch Verformen von* k*-flachen Stücken* $V \subset \mathbb{R}^k$ *mit regulären Abbildungen in den* $\mathbb{R}^n$.

(iii) *(Beschreibung durch Diffeomorphismen)*
Zu jedem $x_\circ \in M$ *gibt es eine offene Umgebung* U *von* $x_\circ$ *in* $\mathbb{R}^n$, *eine offene Umgebung* W *von* 0 *in* $\mathbb{R}^n$ *und einen Diffeomorphismus* $\varphi : W \longrightarrow U$ *der Klasse* C^ℓ *mit* $\varphi\Big(W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})\Big) = U \cap M$. *(Durch* φ^{-1} *wird* M *lokal geradegebogen.)*

Beweis :

Wir erwähnen nur, dass $(i) \implies (ii)$ direkt aus dem Satz über implizite Funktionen folgt.

$\square$

Standardbeispiel für (ii): reguläre Kurven (mit injektiver Parametrisierung)

$\Phi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei C^ℓ und injektiv mit $\Phi'(t) \neq 0$ für alle t
$\Longrightarrow \Phi$ ist reguläre Abbildung im Sinne von Def. 21.1;
früher haben wir von regulären Kurven gesprochen;
durch Umtransformation von (a, b) auf z.B. $(-1, 1)$ kann man -wie in (ii) verlangt- erreichen, dass Φ auf einer Nullumgebung $\subset \mathbb{R}$ definiert ist.

Reguläre Kurven $\subset \mathbb{R}^n$ mit injektiver Parametrisierung sind also 1-dim. Untermannigfaltigkeiten.

Bemerkung :

dass $V \subset \mathbb{R}^k$ als Nullumgebung gewählt wird, hat lediglich technische Gründe!

Tangentenvektoren/ Tangentialraum

Definition 21.3 :

Sei M eine k-dim. Mannigfaltigkeit $\subset \mathbb{R}^n$, $x_\circ \in M$.

(i) $v \in \mathbb{R}^n$ *heißt* **Tangentenvektor an M in $\mathbf{x}_\circ$**

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{es gibt eine } C^1\text{-Kurve } \gamma : (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit} \\ \gamma(0) = x_\circ,\ \gamma'(0) = v \text{ und } \gamma(t) \in M \text{ für alle } t. \end{cases}$$

M

(Die Kurve γ muss in M verlaufen)

v

$x_\circ$

γ

(ii) $T_{x_\circ}M$ = *Menge aller Tangentenvektoren an M in $x_\circ$ heißt* **Tangentialraum an M in $\mathbf{x}_\circ$**.

Bemerkung :

$$\gamma(t) \equiv x_\circ \quad \overset{\gamma \text{ konstante Kurve}}{\Longrightarrow} \quad 0 \in T_{x_\circ}M$$

Satz 21.4 :

Sei M k-dim. Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, $x_\circ \in M$.
Dann ist $T_{x_\circ}M$ ein k-dim. Vektorunterraum von $\mathbb{R}^n$.

Beweis und Darstellung von $T_{x_\circ}M$:

(i) Schreibe M gemäß 21.3(ii), lokal bei $x_\circ$ als

$M \cap U_{x_\circ} = \Phi(V_\circ)$, $\Phi : V_\circ \longrightarrow U(x_\circ)$ regulär,

$\Phi(0) = x_\circ$, $V_\circ =$ Nullumg. in $\mathbb{R}^k$, $U_{x_\circ} =$ Umg. von $x_\circ$

Sei $\{e_1, \ldots, e_k\} :=$ Standardbasis in $\mathbb{R}^k$;

setze $\Gamma_i(t) = te_i$, $i = 1, \ldots, k$

$\Longrightarrow \quad \gamma_i(t) := \Phi\Big(\Gamma_i(t)\Big)$, $t \in (-\delta, \delta)$ (Kurve in M durch $x_\circ$)

$\Longrightarrow \quad \gamma_i'(0) = D\Phi(0)(e_i) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(0) \in T_{x_\circ}M.$

M

e_i

$x_\circ$

e_j

Also :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(0) \in T_{x_\circ}M, \; i = 1, \ldots, k$$

umgekehrt :

Sei $v \in T_{x_\circ}M \overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} v = \gamma'(0)$, γ Kurve in M durch $x_\circ$ passend gewählt.

Setze $\Gamma(t) := \Phi^{-1}\Big(\gamma(t)\Big)$ (Kurve in $\mathbb{R}^k$ durch 0)

$\Longrightarrow \Gamma'(0) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$ mit gewissen $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (Diff'barkeit folgt aus Konstruktion von Φ !)

Also :

$$v = \gamma'(0) = \frac{d}{dt|_0}(\Phi \circ \Gamma)(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(0).$$

<u>Ergebnis</u> :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} T_{x_\circ}M & = & \text{Span}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(0), \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(0)\right\} \\ & = & \text{Bild } D\Phi(0) \end{array}}$$

(ii) Schreibe M gemäß Definition von Mannigfaltigkeit als Nullstellenmenge

$$M \cap U_{x_\circ} = \Big\{x \in U_{x_\circ} : f(x) = 0\Big\} \text{ mit } f : U_{x_\circ} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}, \text{ Rang } Df = n - k.$$

$$\begin{array}{lll} & \gamma(t) \text{ ist Kurve in } M \text{ durch } x_\circ & \\ \Longrightarrow & f^i\Big(\gamma(t)\Big) = 0, & i = 1, \ldots, n-k \\ \overset{\text{leite ab}}{\Longrightarrow} & \Big\langle \nabla f^i(x_\circ), \gamma'(0)\Big\rangle = 0, & \text{- " -} \end{array}$$

D.h. :

$$v \in T_{x_\circ}M \Longleftrightarrow v \perp \nabla f^i(x_\circ), \ i = 1, \ldots, n-k.$$

Man setzt

$$\Big(T_{x_\circ}M\Big)^\perp = \textbf{Normalraum zu M in } \mathbf{x_\circ}$$

Dann folgt :

$$\boxed{\Big(T_{x_\circ}M\Big)^\perp = \text{Span}\left\{\nabla f^1(x_\circ), \ldots, \nabla f^{n-k}(x_\circ)\right\}}$$

und wir sehen nochmal

$$\dim \Big(T_{x_\circ}M\Big)^\perp = n - k \implies \dim T_{x_\circ}M = k.$$

□

Spezialfälle :

1) Sei $M = \Big\{x \in U : g(x) = 0\Big\},\ U \subset \mathbb{R}^n$ offen, auf $g : U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R},\ \nabla g(x) \neq 0$ auf M.
Dann ist :

$\nabla g(x_\circ)$

M

$$\mathbf{T_{x_\circ}M} = \Big[\nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}_\circ)\Big]^\perp$$

Beispiel :
$S^{n-1} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 = 1\Big\}$

$$g(x) := |x|^2 - 1 \quad \Longrightarrow \quad \nabla g(x) = 2x \neq 0 \text{ auf } S^{n-1}$$
$$\Longrightarrow \quad \Big(T_x S^{n-1}\Big)^\perp = \Big\{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\Big\}.$$

2) <u>Hyperflächen in Graphenform :</u>
Sei $M = \Big\{\Big(x, \rho(x)\Big) : x \in \Omega\Big\},\ \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $\rho : \Omega \overset{C^l}{\to} \mathbb{R}$

$$\partial_i(x, \rho(x)\Big) = \Big(e_i, \partial_i \rho(x)\Big) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Tangentialraum } T_{(x,\rho(x))}M \text{ wird aufgespannt von} \\ \Big(1, 0 \ldots, 0, \partial_1 \rho(x)\Big), \ldots, \Big(0, \ldots, 1, \partial_{n-1}\rho(x)\Big). \end{array} \right.$$

bei 2 Variablen x, y :

$$T_{(x,y,\rho(x,y))}M \ = \text{Span}\ \Big\{\Big(1, 0, \partial_x \rho(x,y)\Big), \Big(0, 1, \partial_y \rho(x,y)\Big)\Big\}.$$

(Noch eine) Anwendung des Begriffes “Mannigfaltigkeit” :

Extrema mit Nebenbedingungen, Lagrange’sche Multiplikatoren

Ausgangspunkte :

(I) *Wie bestimmt man lokale Extrema von* $f|_M$ *?*
hier: $M = k$-dim Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n \subset U$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R})$

M

$X_\circ$

V

U

Notation :

$$x_\circ \text{ ist lokales Max. von } f|_M :\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \text{ Umgebung } V \text{ von } x_\circ \subset \mathbb{R}^n \text{ mit} \\ f(x) \leq f(x_\circ) \ \forall\, x \in V \cap M \end{cases}$$

Die für freie lokale Extrema notwendige Bedingung $\nabla f(x_\circ) = 0$ jetzt nicht erfüllt:

Beispiel :

$f(x,y) := x + y, \ M = \Big\{(\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi]\Big\} = S^1$
M kompakt, f stetig $\Longrightarrow$ Max. und Min. von $f|_M$ existieren,
aber : $\nabla f(x,y) = (1,1) \neq 0$ auf M

(II) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\overline{\Omega}$ kompakt, $f \in \Big(C^1(\Omega, \mathbb{R}) \ \cap \ C^\circ(\overline{\Omega}, \mathbb{R})\Big)$,
$M = \partial\Omega$ sei $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit
Wie findet man Max. und Min. von f *auf* $\overline{\Omega}$ *?*
im Inneren :

$\nabla f(x) = 0$ ist *notwendige* Bedingung

am Rand :

liegen Max. und/oder Min. auf $M := \partial\Omega$, so bestimmt man zunächst die **lok. Extrema von** $\mathbf{f|_M}$ (Tabelle + Vergleich der Werte $f(x)$ liefert die gesuchten Größen).

Lösung des Problems (II)) :

Sei $\dim M = k,\ x_\circ \in M$ sei lokale Extremstelle von $f|_M$, $D \subset \mathbb{R}^k$ offen, wähle *reguläre* Parametrisierung $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von M bei $x_\circ$, 0.E. $\varphi(0) = x_\circ$.

φ

$\mathbb{R}$

0

$x_\circ$

D

$\Longrightarrow\quad f \circ \varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ hat eine innere lokale Extremstelle bei $0 \in D$

$\Longrightarrow\quad \nabla(f \circ \varphi)(0) = 0$

$\Longrightarrow\quad \left\langle \nabla f(x_\circ), \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\varphi(0) \right\rangle = 0,\ \alpha = 1, \ldots, k.$

$$\Longleftrightarrow\quad \boxed{\nabla f(x_\circ) \in \left(T_{x_\circ}M\right)^{\perp}} \qquad (1)$$

(ersetzt die im Innern vorliegende Bedingung $\nabla f(x_\circ) = 0$)

Umformulierung von (1) :

Schreibe $M \cap V = \left\{ x \in V : g(x) = 0 \right\}$
mit einer Umgebung V von $x_\circ$ in $\mathbb{R}^n$ und $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$,
Rang $Dg = n - k \quad \Longrightarrow \quad \left(T_{x_\circ}\right)^{\perp} = \operatorname{Span}\left\{ \nabla g_1(x_\circ), \ldots, \nabla g_{n-k}(x_\circ) \right\}$,
und nach (1) gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_i \in \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\nabla f(x_\circ) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \nabla g^i(x_\circ)} \qquad (2)$$

(2) besteht aus n Gleichungen mit den Unbekannten $x_\circ^1, \ldots, x_\circ^n,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}$.
Ergänzt man (2) noch durch

$$\boxed{g^i(x_\circ) = 0,\ i = 1, \ldots, n-k} \qquad (3),$$

so hat man Übereinstimmung in der Zahl der Variablen und Gleichungen.

Satz 21.5 : (Lagrange'sche Multiplikatorenmethode)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $f \in C^1(U,\mathbb{R}),\ g \in C^1(U,\mathbb{R}^{n-k}), M := \Big\{x \in U : g(x) = 0\Big\}$*,*
Dg *habe maximalen Rang auf* M*. Hat dann* $f|_M : M \to \mathbb{R}$ *in* $a \in M$ *ein* **lokales Extremum***, so gibt es* $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$*, so dass für die Funktion*
$G : U \to \mathbb{R},\ G(x) := f(x) - \sum\limits_{i=1}^{n-k} \lambda_i g^i(x)$*, der Punkt* a *ein* **kritischer** *Punkt ist,*
d.h. $\nabla G(a) = 0$*.*
$\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k}$ *heißen* **Lagrange Multiplikatoren***.*

$\square$

Beispiel :

Sei $M = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\Big\},\ f(x,y) = 2x^3 + y^4, (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

gesucht : Max. und Min. von $f|_M$

Sei $g(x,y) := x^2 + y^2 - 1$.
Notwendige Bedingung:

$$\nabla f(x,y),\ \nabla g(x,y) \text{ sind linear abhängig } \iff (6x^2, 4y^3) = \lambda \cdot (2x, 2y) \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

<u>**Fall 1**</u> **:** $\lambda = 0$

$\implies (6x^2, 4y^3) = (0,0) \implies x = 0$ und $y = 0$
<u>unmöglich</u>, da $g(x,y) = 0$ gelten muß

<u>**Fall 2**</u> **:** $\lambda \neq 0$

<u>Unterfall a</u> : $x \neq 0$ und $y \neq 0$

$$\begin{aligned} 6x^2 = 2\lambda x &\implies \lambda = 3x \\ 4y^3 = 2\lambda y &\implies \lambda = 2y^2 \\ &\implies 3x = 2y^2 \end{aligned}$$

Nun betrachte $x^2 + y^2 = 1$, d. h. $y^2 = 1 - x^2$

Einsetzen :

$$\begin{aligned} 3x = 2 - 2x^2 &\iff x^2 + \tfrac{3}{2}x - 1 = 0 \\ &\iff x = -\tfrac{3}{4} \pm \sqrt{\tfrac{9}{16} + 1} = -\tfrac{3}{4} \pm \tfrac{5}{4} \end{aligned}$$

$x = -2$ entfällt !

Also :

$x = \frac{1}{2} \overset{x^2+y^2=1}{\implies} y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Unterfall b</u> : $x = 0$

$\implies y = \pm 1$

Unterfall c : $y = 0$

$\Longrightarrow \quad x = \pm 1$

Nun lege man eine Tabelle an :

(x,y)	$(0,1)$	$(0,-1)$	$(1,0)$	$(-1,0)$	$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$
$f(x,y)$	1	1	2 $\uparrow$ max	-2 $\uparrow$ min	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$

Bemerkung :

Man kann natürlich jetzt noch untersuchen, ob die anderen Punkte lokale Extrema sind.

22

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung *der Ordnung* $k \geq 1$ hat die Form

$$(*) \qquad F\Big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k)}(x)\Big) = 0$$

mit **gegebener** Funktion $F : I \times \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, hierbei bezeichnet $I \subset \mathbb{R}$ ein **offenes** Intervall.
Es handelt sich also um eine Relation zwischen $x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k)}(x)$ auf I.
gesucht : eine k-mal diff'bare Funktion $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $(*)$ gilt für alle $x \in I$.

Beispiele :

(i) $y(x) = e^x$ erfüllt $y'(x) = y(x)$, d.h. mit $F(x, \alpha, \beta) := \beta - \alpha$ gilt: $F\Big(x, y(x), y'(x)\Big) = 0$.

(ii) Die Funktion $y(x) = \sin x$, bzw. $y(x) = \cos x$ erfüllen $y''(x) = -y(x)$ auf $\mathbb{R}$
hier: $F(x, u, v, w) := w + u \Longrightarrow F\Big(x, y(x), y'(x), y''(x)\Big) = 0$.

In diesen Beispielen hängt F **nicht von x ab** $\longrightarrow$ **autonome Differentialgleichung**.

Bemerkungen :

1) Sind $F = (F^1, \ldots, F^m),\ y = (y^1, \ldots, y^n)$ vektorwertig, so heißt $(*)$
ein System gewöhnlicher Differentialgleichung der Ordnung k.

Beispiel :

$$y(x) := (\sin x, \cos x) \quad \text{löst das Gleichungssystem} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y_1'(x) & = & y_2(x), \\ y_2'(x) & = & -y_1(x) \end{array} \right.$$

Wie sieht F hier aus ?

2) Was bedeutet gewöhnliche Differentialgleichung ?

   $y = y(x)$ *h ängt nur von einer reellen* Variablen ab, im Unterschied dazu : *partielle Differentialgleichungen* sind Relationen, die zwischen einer Funktion $u(x_1, \ldots, x_n)$ und ihren partiellen Ableitungen bestehen, z.B. :

   $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$ oder $\frac{\partial}{\partial t} v - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = 0$ für $v = v(t, x_1, \ldots, x_n)$

   Theorie dazu ist viel komplizierter $\longrightarrow$ Hauptstudium !

3) gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben :

   - Bewegungsgleichungen in der Physik
   - Reaktionsvorgänge in der Chemie
   - Evolutionsmodelle in der Biologie
     $y(t) =$ Anzahl der Mitglieder in einer Population zur Zeit t;
     $y'(t) =$ Änderungsrate
     Literatur : Braun, Differential Equations and their Applications, Springer

4) kann man $(*)$ nach der höchsten Ableitung auflösen, also die Form

   $(**) \quad y^{(k)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k-1)}(x)),\ x \in I$, erreichen,

   so spricht man von einer **expliziten Differentialgleichung k$^{\text{ter}}$ Ordnung**

Explizite Gleichungen und Systeme 1$^{\text{ter}}$ Ordnung

betrachte $y'(x) = f(x, y(x)),\ x \in I$ (f gegeben)

uninteressanter Fall :

f hängt von y ab, d.h.

$y'(x) = f(x),\ x \in I \overset{\text{Hauptsatz}}{\Longrightarrow} y(x) = c + \int\limits_{x_\circ}^{x} f(t)\, dt$, falls f stetig.

Hier gilt : $c \in \mathbb{R},\ x_\circ \in I$ beliebig.

<u>Man sieht direkt</u> :

Ist $x_\circ \in I$ gegeben und sucht man eine Lösung y, die zur Zeit $x_\circ$ den Wert η annimmt, so gibt es **nur genau eine** Lösung.

Allgemeines vorweg :

- Differentialgleichungen müssen **keine Lösungen** haben!

$$(y(x) - x)^2 + (y'(x))^2 = 0 \implies \begin{cases} y(x) & = \quad x \quad \text{und} \\ y'(x) & = \quad 0 \end{cases}$$

- Differentialgleichungen können viele Lösungen haben!

  Beispiel :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sqrt[3]{y^2},\ (x,y)\in\mathbb{R} \\ y'(x) &= f(x,y(x)) \end{aligned}$$

  Lösung :

$$\begin{aligned} \varphi_\circ(x) &:= 0 \\ \text{oder}\quad \Psi_a(x) &:= \tfrac{1}{27}(x-a)^3,\ a\in\mathbb{R}, \\ \text{oder}\quad \Psi_{b,c}(x) &:= \begin{cases} \Psi_b(x) & ,x\le b \\ 0 & ,b\le x\le c,\ b<c \\ \Psi_c(x) & ,x\ge c \end{cases} \end{aligned}$$

  speziell :

  $\varphi_\circ, \Psi_\circ, \Psi_{b,c}$ $(b<0<c)$ erfüllen alle das Anfangswertproblem

  $y'(x) = \sqrt[3]{y(x)^2}$ mit $\boxed{y(0)=0}$

  unser Ziel :

  Bedingungen an $f(x,y)$, die die Existenz von Lösungen zu $y'(x) = f(x,a(x))$ garantieren.

Definition 22.1 :

Sei $G\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ offen und $f: G\longrightarrow\mathbb{R}^n$. Wir schreiben $(x,y)=(x,y_1,\dots,y_n)$ für die Variablen von f.

i) f heißt **(partiell) Lipschitz stetig bzgl. der y-Variablen**

$$\Longleftrightarrow\ \exists\ L\ge 0 : \Big|f(x,y)-f(x,\tilde{y})\Big| \le L\cdot|y-\tilde{y}| \quad \text{für alle } (x,y),\ (x,\tilde{y})\in G.$$

ii) f heißt **lokal Lipschitz bzgl.** *y (genauer : "lokal partiell"...)*

$\forall\ (x_\circ,y_\circ)\in G\ \exists$ Umgebung U von $(x_\circ,y_\circ)$ in G und $L\ge 0$ mit

$$\Big|f(x,y)-f(x,\tilde{y})\Big| \le L\cdot|y-\tilde{y}| \text{ für alle } (x,y),\ (x,\tilde{y})\in U$$

Bemerkungen :

1) ii) ist offenbar Abschwächung von i)

2) $G:=\mathbb{R}\times\mathbb{R}, f(x,y)=\sqrt[3]{y^2}$ genügt in keiner Umgebung von $(a,0),\ a\in\mathbb{R}$ beliebig, einer lokalen Lipschitz Bedingung (denn $t\mapsto\sqrt[3]{t^2}$ ist nicht Lipschitz bei 0)

3) *Wie prüft man die Bedingungen?*

   Finde Schranken auf $\frac{\partial f}{\partial y_i}, i=1,\dots,n$.

Satz 22.1 : *(Eindeutigkeit)*

> *$f : G \to \mathbb{R}^n,\ G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, sei stetig und genüge in G einer lokalen Lipschitz Bedingung bzgl. y. Seien $\varphi,\ \Psi : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen von $y'(x) = f(x, y(x))$ auf dem Intervall I (mit $(t, \varphi(t)),\ (t, \Psi(t)) \in G$).*
> *Gibt es dann ein $x_\circ \in I$ mit $\varphi(x_\circ) = \Psi(x_\circ)$, so folgt $\varphi = \Psi$ auf ganz I.*

Beweis :

<u>1. Schritt</u> :

<u>*Behauptung*</u> *:*

Ist $a \in I$ ein beliebiger Punkt mit $\varphi(a) = \Psi(a)$, so gibt es mindestens ein $\varepsilon > 0$ mit $\varphi = \Psi$ für $x \in I, |x - a| < \varepsilon$. ($\Longrightarrow \quad \varphi = \Psi$ auf Umgebung von $x_\circ \cap I$)

<u>*Beweis*</u> *:*

Schreibe

$$\varphi(x) - \Psi(x) = \int_a^x \Big(\varphi'(t) - \Psi'(t)\Big)\, dt = \int_a^x \Big(f(t, \varphi(t)) - f(t, \Psi(t))\Big)\, dt.$$

Zu $(a, \varphi(a)) = (a, \Psi(a)) \in G$ existiert Umgebung $U \subset G$ und $L \geq 0$ mit

$$\Big|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\Big| \leq L \cdot \Big|y - \tilde{y}\Big| \text{ für } (x, y),\ (x, \tilde{y}) \in U.$$

φ, Ψ stetig in $a \implies \exists\, \delta > 0$ ($\delta > 0$ so, dass $(t, \varphi(t)),\ (t, \Psi(t)) \in U$) mit

$$\Big|f(t, \varphi(t)) - f(t, \Psi(t))\Big| \leq L \cdot \Big|\varphi(t) - \Psi(t)\Big| \text{ für alle } t \in I,\ |t - a| < \delta$$

Also :

$$\Big|\varphi(x) - \Psi(x)\Big| \leq L \cdot \Big|\int_a^x |\varphi(t) - \Psi(t)|\, dt\Big|,\ x \in I,\ |x - a| < \delta$$

O.E. gilt $L > 0$ und $L \cdot \delta \leq \frac{1}{2}$ (sonst verkleinere δ).
Sei $J := I \cap [a - \frac{\delta}{2}, a + \frac{\delta}{2}]$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow & |\varphi(x) - \Psi(x)| &\leq L \cdot \delta \cdot \underbrace{\max\{|\varphi(y) - \Psi(y)| : y \in J\}}_{=:M} \text{ für alle } x \in J \\
&\overset{\text{bilde links max}}{\Longrightarrow} & M &\leq L \cdot \delta \cdot M \quad \leq \tfrac{1}{2} M \\
&\Longrightarrow & M &= 0,
\end{aligned}$$

d.h. $\varphi = \Psi$ auf J. Mit $\varepsilon = \delta/2$ folgt die Behandlung.

2. Schritt :

Behauptung :

$$\varphi(x) = \Psi(x) \quad \forall\, x \in I,\ x \geq x_\circ$$

Beweis :

$\eta_\circ := \sup\{\eta \in I :\ \varphi = \Psi \text{ auf } [x_\circ, \eta]\}$;

ist $\eta_\circ = \infty$ oder rechter Endpunkt von $I \Longrightarrow$ Behauptung,

falls nicht $\Longrightarrow \exists\, \delta > 0$ mit $[\eta_\circ, \eta_\circ + \delta] \subset I$

Def. von $\eta_\circ$, Stetigkeit von $\varphi, \Psi \implies \varphi(\eta_\circ) = \Psi(\eta_\circ)$;

$\overset{\text{Schritt 1}}{\Longrightarrow}\ \exists\, \varepsilon > 0$ mit $\varphi = \Psi$ auf $[\eta_\circ, \eta_\circ + \varepsilon]$, Widerspruch zur Def. von $\eta_\circ$.

3. Schritt :

Behauptung :

$$\varphi(x) = \Psi(x) \quad \forall x \in I,\ x \leq x_\circ$$

Beweis :

analog zu Schritt 2

□

Beispiel :

$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x,y) = xy^2$, erfüllt überall eine lokale Lipschitz Bedingung bzgl. y, ist allerdings nicht auf ganz G Lipschitz bzgl. y.

Wir zeigen jetzt : | lokale Lipschitz Stetigkeit von f bzgl. y
$\Longrightarrow$ lokale Existenz von Lösungen.

Als Hilfsmittel braucht man

Fixpunktsatz von Banach : (→ Übung)

Sei (X, d) **vollständiger** metrischer Raum und die Abb. $F : A \longrightarrow A$ erfülle

$$d\Big(F(x), F(y)\Big) \leq \Theta\ d(x,y) \text{ für alle } x,\ y \in A \text{ mit } \boldsymbol{\Theta < 1}.$$

Ist A **abgeschlossen**, so hat F **genau einen** Fixpunkt x^*, d.h. $F(x^*) = x^*$.

Für jeden Startwerte $a \in A$ konvergiert dann die rekursiv definierte Folge

$$x_\circ = a, \quad x_{n+1} = F(x_n)$$

gegen x^*.

Beweis :

Man rechne nach, dass $\{x_n\}$ eine Cauchy Folge ist.

Satz 22.2 : (Existenzsatz von Picard-Lindelöf)

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge einer **lokalen** *Lipschitz-Bedingung bzgl. y auf G. Dann gibt es zu jedem $(a, \eta) \in G$ ein $\varepsilon > 0$ und eine C^1-Funktion $\Psi : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit*

$$\begin{aligned} \Psi(a) &= \eta \qquad (\underline{\textit{Anfangsbedingung}}) \\ \Psi'(x) &= f(x, \Psi, (x)) \ \textit{auf} \ [a - \varepsilon, a + \varepsilon]. \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^n$

Graph ψ G

η (a, η)

$\mathbb{R}$

$a - \varepsilon$ a $a + \varepsilon$

Bemerkungen zum Satz von Picard-Lindelöf :

1) Satz 22.1 $\Longrightarrow$ Eindeutigkeit

2) man spricht von einem <u>lokalen</u> Existenzsatz, da Ψ und U nur auf einem *sehr kleinen* Intervall um a existiert.

3) Möglicherweise existiert die im Satz gewonnene Lösung aber auch auf einem größeren Intervall als $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.
Anders als bei linearen Problemen kann man bei nichtlinearen Problemen i.a. keine Existenz für alle Zeiten erwarten! (vgl. Zusatz zu Satz 22.2).

   Beispiel :

   $y'(x) = 1 + y^2(t), \ y(0) = 0, \ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
   wird eindeutig gelöst von $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \tan \mathbf{x}$, wobei der Definitionsbereich dieser Lösung nicht vergrößert werden kann!

4) Eine Funktion $\Psi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **maximale Lösung** des AWP's

$$\Psi'(x) = f(x, \Psi(x)), \ \Psi(a) = \eta, \ x \in I,$$

   wenn es **keine** Lösung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ gibt, die auf einem Intervall $J \supsetneqq I$ erklärt ist.

   Man kann zeigen :

   Unter den Voraussetzungen von Satz 22.2 lässt sich die lokale Lösung Ψ zu einer maximalen Lösung fortsetzen.

Spezialfall :

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit einer lokalen Lipschitz Bedingung bzgl. $y \in \mathbb{R}^n$ und $\Psi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die **maximale Lösung** des AWP's

$$\Psi'(x) = f(x, \Psi(x)),\ \Psi(a) = \eta.$$

Seien $\alpha < \beta$ die Grenzen von I. Dann gilt :

i) $\alpha = -\infty$ **oder**

ii) $\boxed{\alpha > -\infty}$: In diesem Fall ist $\lim\limits_{x \downarrow \alpha} \left|\Psi(x)\right| = \infty$

iii) $\beta = \infty$ **oder**

iv) $\boxed{\beta < \infty}$: In diesem Fall ist $\lim\limits_{x \uparrow \beta} \left|\Psi(x)\right| = \infty.$

5) Falls f nur stetig ist, kann man noch lokale Existenz beweisen, hat aber keine Eindeutigkeit. (**Satz von Peano**)

6) Man kann die Größe von ε genau ausrechnen. Das ergibt unter Umständen globale Existenzsätze. (vgl. Zusatz zu Satz 22.2)

Beweis :

Wir beginnen mit einer Umformulierung des Problems

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Interfall mit $a \in I, \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Dann gilt :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \varphi(a) & = & \eta \\ \varphi'(x) & = & f(x, \varphi(x)),\ x \in I \end{array} \right\} \quad \text{"Anfangswertproblem"}$$

$$\overset{\text{Hauptsatz}}{\Longleftrightarrow} \quad \varphi(x) = \eta + \int_a^x f(t, \varphi(t))\, dt,\ x \in I \quad \text{"Integralgleichung"}$$

$$\Longleftrightarrow \quad T(\varphi) = \varphi \qquad (*) \qquad \text{"Fixpunktproblem"}$$

mit dem Opteraror $T(\varphi)(x) := \eta + \int_a^x f(t, \varphi(t))\, dt,\ x \in I.$

Nun richten wir "alles" so ein, dass wir den Fixpunktsatz angewenden können :

Sei $r > 0$ so, dass

$$V := [a - r, a + r] \times \overline{B}_r(\eta) \subset G$$

und f auf V Lipschitz ist mit Konstante $L > 0$. Dann gilt

$$V \text{ kompakt, } f \text{ stetig} \Longrightarrow M := \sup_V |f| < \infty.$$

Sei $\varepsilon < r$ noch beliebig, $I := [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Setze nun :

$$\begin{aligned} X &:= \Big(C^\circ(I,\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty\Big), \\ A &:= \Big\{\varphi \in X : \|\varphi-\eta\|_\infty \le r\Big\} \ \ (\|\varphi(t)\|_\infty := \sup_{t\in I} |\varphi(t)|), \\ T &: \quad A \longrightarrow X \text{ wie vorhin.} \end{aligned}$$

Beachte :

- A ist *abgeschlossene* Kugel um die konstante Funktion η
- $x \mapsto \eta + \int\limits_a^x f\Big(t,\varphi(t)\Big)\,dt,\ x \in I$, ist nach dem Hauptsatz sogar C^1, also ein Element von X

Zeige :

1) $\underline{T(A) \subset A}$

   Sei $\varphi \in A \Longrightarrow \|T(\varphi)-\eta\|_\infty = \sup\limits_{x\in I}\Big|\int\limits_a^x f\Big(t,\varphi(t)\Big)\,dt\Big|$

   Es ist

   $$|t-a| \le |x-a| \le \varepsilon < r \text{ und } |\varphi(t)-\eta| \le r, \text{ da } \varphi \in A$$

   $$\Longrightarrow \quad \Big(t,\varphi(t)\Big) \in V, \text{ so dass } \sup_{x\in I}\Big|\int\limits_a^x f\Big(t,\varphi(t)\Big)\,dt\Big| \le M\cdot\varepsilon$$

   Wir verlangen : $\boxed{M\cdot\varepsilon < r}$ $\quad (*)$

   $\Longrightarrow \|T(\varphi)-\eta\| \le r$, d.h. 1) gilt.

2) T ist (bei passender Wahl von ε) <u>streng kontrahierend</u>

   Seien $\varphi, \Psi \in A \quad \overset{s.o.}{\Longrightarrow} \quad \Big(t,\varphi(t)\Big),\ \Big(t,\Psi(t)\Big) \in V\ \forall\ t \in I.$

   Also gilt :

   $$\|T(\varphi)-T(\Psi)\|_\infty = \sup_{x\in I}\Big|\int\limits_a^x \Big(f\Big(t,\varphi(t)\Big) - f\Big(t,\Psi(t)\Big)\Big)\,dt\Big| \le L\cdot\varepsilon\cdot\|\varphi-\Psi\|_\infty.$$

   In Ergänzung zu $(*)$ sei noch : $\boxed{L\cdot\varepsilon \le \frac{1}{2}}$

   Erfüllt ε all diese Bedingungen, so gibt es $\varphi \in A$ mit $T(\varphi) = \varphi$.
   $\varphi : [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist dann die gesuchte Lösung.

$\square$

Zusatz zu 22.2 : (globale Existenz bei linearem Wachstum)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall (auch $I = \mathbb{R}$), $F : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig mit (globaler) partieller Lipschitz-Bedingung bzgl. der $\mathbb{R}^n$-Variablen. Außerdem sei F höchstens linear wachsend in y, d.h. es gibt $a, b \geq 0$ mit

$$\boxed{|F(x,y)| \leq a|y| + b \quad \forall\ (x,y) \in I \times \mathbb{R}^n.}$$

Seien $(x_\circ, \eta) \in I \times \mathbb{R}^n$. Dann gibt es **genau eine** auf ganz I definierte Lösung

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^n \quad \text{des AWP} : y'(x) = F(x, y(x)),\ y(x_\circ) = \eta,\ x \in I$$

Bemerkung :

hier wird also I vorgegeben!

Beweis :

siehe Übung

Anwendung : (s. später)

$y'(x) = A(x) \cdot y(x) + b(x)$ (lineares System)

mit stetiger $(n \times n)$-Matrix A und $b \in C^\circ(I, \mathbb{R}^n)$, $|A(x)|,\ |b(x)| \leq \text{const} < +\infty$

Hier : $F(x,y) = A(x)y + b(x)$

Explizite Gleichungen und Systeme beliebiger Ordnung

Satz 22.1 und Satz 22.2 gelten für explizite Gleichungen und Systeme **1$^{\text{ter}}$ Ordnung**.

Daher benutzt man bei der Lösung expliziter Gleichungen k^{ter} Ordnung einen "Trick", mit dessen Hilfe man diese Gleichungen auf Systeme 1^{ter} Ordnung reduziert :

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ *offen*, $f : G \to \mathbb{R}$ *stetig*. Betrachte für y : Intervall $I \longrightarrow \mathbb{R}$ die explizite *Gleichung* k^{ter} Ordnung.

(1) $$y^{(k)}(x) = f\Big(x, \underbrace{y(x), y'(x) \ldots, y^{(k-1)}(x)}_{\in \mathbb{R}^k}\Big),\ x \in I.$$

$$\Big(\text{ z.B. } \ y^{(4)}(x) = x^2 y(x) + \Big(y''(x)\Big)^3 + y'''(x)\Big)$$

Definiere mit einer Lösung y die <u>Vektorfunktion</u>

$$Y(x) := \Big(y(x), \ldots, y^{(k-1)}(x)\Big) \quad (\in \mathbb{R}^k)$$

Schreibt man Y in der Form $\Big(Y_\circ, \ldots, Y_{k-1}\Big)$, so gelten die folgenden Gleichungen :

$$(2) \qquad \begin{cases} Y_\circ'(x) & = & Y_1(x) \\ Y_1'(x) & = & Y_2(x) \\ \quad\vdots & & \\ Y_{k-1}'(x) & = & f\Big(x, Y(x)\Big), \end{cases}$$

wobei die letzte Zeile offenbar genau der Gleichung (1) entspricht.

Sei $F : G \longrightarrow \mathbb{R}^k,\ F(x,Z) := \Big(Z_1, \ldots, Z_{k-1}, f(x, Z_\circ, \ldots, Z_{k-1})\Big) \in \mathbb{R}^k$ für $Z = \Big(Z_\circ, \ldots, Z_{k-1}\Big)$. Dann liest sich (2) als

$$(2)^* \qquad Y'(x) = F\Big(x, Y(x)\Big).$$

Ergebnis :

$$y(x) \text{ löst } (1) \Longrightarrow Y(x) = \Big(y(x), \ldots, y^{(k-1)}(x)\Big) \text{ löst } (2)^*$$

umgekehrt :

Sei $Y(x) = \Big(Y_\circ(x), \ldots, Y_{k-1}(x)\Big)$ Lösung von $(2)^*$ mit obigem F.

$\overset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow} y(x) := Y_\circ(x)$ löst (1) $\quad \Big($ zeige : $Y_1 = Y_\circ', Y_2 = Y'^1, \ldots \Big)$

Es besteht also eine bijektive Beziehung zwischen den Lösungen von (1) und (2)* .

Außerdem sieht man :

> Lösungen Y zu $(2)^*$ sind *eindeutig* (unter vernünftigen Bedingungen zu F), wenn $Y(x_\circ)$ zu einer Zeit $x_\circ$ vorgeschrieben wird. Also müssen bei einer Gleichung k^{ter} Ordnung k Vorgaben $y(x_\circ), y'(x_\circ), \ldots, y^{(k-1)}(x_\circ)$ gemacht werden.

Beachte nun noch :

lokale Lipschitz-Bedingung von	$\Longleftrightarrow$	$\ldots \quad F : G \longrightarrow \mathbb{R}^k$
$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ bzgl. der $\mathbb{R}^k$-Variablen		$\ldots$

Mithin gilt dann folgendes Korollar :

Korollar (zu 22.1 und 22.2) :

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ offen, $f : G \to \mathbb{R}$ sei stetig und erfülle bzgl. der $\mathbb{R}^k$-Variablen eine lokale Lipschitz-Bedingung auf G.

a) Seien $\varphi, \Psi : I \to \mathbb{R}$ Lösungen von

$$(*) \quad y^{(k)} = f\Big(\cdot, y, \ldots, y^{(k-1)}\Big)$$

auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Sei $a \in I$ gegeben mit

$$\varphi(a) = \Psi(a),\ \varphi'(a) = \Psi'(a), \ldots, \varphi^{(k-1)}(a) = \Psi^{(k-1)}(a).$$

Dann gilt $\varphi = \Psi$ auf I.

b) Ist $(a, \eta_\circ, \ldots, \eta_{k-1}) \in G$ beliebig, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung $\varphi : [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \to \mathbb{R}$ von $(*)$ mit $\varphi(a) = \eta_\circ,\ \varphi'(a) = \eta_1, \ldots,\ \varphi^{(k-1)}(a) = \eta_{k-1}$.

□

Bemerkung :

Systeme der Ordnung $k \geq 2$ lassen sich auf Systeme der Ordnung 1 mit entsprechend mehr Komponenten reduzieren $\longrightarrow$ Korrolar anwendbar

Beispiel zur Bemerkung :

Reduktion eines Systems 2^{ter} Ordnung auf ein System 1^{ter} Ordnung

Bewegungsgleichung : ("$\dot{}$" bedeutet $\frac{d}{dt}$)

System 2^{ter} Ordnung :

$$\ddot{X}(t) = F\Big(t, X(t), \dot{X}(t)\Big)$$
$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$X : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \text{ (Ortsvektor).}$$

Setze $\quad Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad Y(t) := \Big(X(t), \dot{X}(t)\Big) \quad \Longrightarrow$

$$(*) \quad \dot{Y}(t) = \Big(Y_4(t), Y_5(t), Y_6(t), F^1\Big(t, Y(t)\Big), F^2\Big(t, Y(t)\Big), F^3\Big(t, Y(t)\Big)\Big)$$

wobei $\quad Y = (Y_1, \ldots, Y_6),\ F = (F^1,\ F^2,\ F^3)$.

$(*)$ ist System 1^{ter} Ordnung für die Funktion Y mit 6 Komponenten.

Eine allgemeine Formulierung des Transformationsprinzips für Systeme der Ordnung k bringt keine neuen Einsichten. Es sollte klar sein, wie es funktioniert.

□

Elementare Lösungsmethoden

Regelfall :

Differentialgleichungen $y^{(k)} = f\Big(\cdot, y, y', \ldots, y^{(k-1)}\Big)$ (+ Anfangsbedingung) lassen sich **nicht elementar** lösen, d.h. es gelingt nicht, Lösungen *in geschlossenen Formeln* $y(x) = \ldots$ anzugeben.

Methode :

Wir haben Picard-Lindelöf; dieser Satz benutzt ein Fixpunktprinzip, d.h. die Lösung y wird konstruiert als Limes einer Folge $\{y_n\}$ mit

$$\begin{aligned} y_\circ &= \text{beliebige Startfunktion,} \\ y_n &= \text{Integraloperator angewendet auf } y_{n-1} \end{aligned}$$

Man kann diese Vorschrift ohne weiteres *numerisch umsetzen* und somit die exakte Lösung y beliebig gut approximieren. *Fehlerabschätzungen* der Form $\|y - y_n\| \cong 1/n$ geben Information, wie weit man noch von der Lösung entfernt ist.

In einigen Spezialfällen lassen sich Lösungen nun doch explizit bestimmen. Die wichtigsten Verfahren sind nachfolgend kurz zusammengestellt.

1) Separation der Variablen

Seien I, J Intervalle $\subset \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

(1) $\boxed{y'(x) = f(x) \cdot g\Big(y(x)\Big)}$ auf I ist zu lösen.

Angenommen, (1) hat Lösung $y(x)$, dann gilt :

Sei G Stammfunktion zu $1/g$

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Kettenregel}}{\Longrightarrow} && y'(x)\Big/g\Big(y(x)\Big) = \tfrac{d}{dx}G\Big(y(x)\Big), \\ &\text{also} && \tfrac{d}{dx}G\Big(y(x)\Big) - f(x) = 0 \\ &\Longrightarrow && G\Big(y(x)\Big) = F(x) + c, \ F \text{ Stammfunktion zu } f, \ c \in \mathbb{R} \text{ konstant.} \end{aligned}$$

Nun löse umgekehrt diese Gleichung, falls möglich (siehe Satz 22.3), nach $y(x)$ auf und zeige, dass (1) gilt.

Die genaue Formulierung gibt uns der folgende Satz :

Satz 22.3 :

Sei $(x_\circ; y_\circ) \in I \times J,\ f : I \longrightarrow \mathbb{R},\ g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig mit* $g(y) \neq 0$ *auf* J.
Man setze

$$F(x) := \int_{x_\circ}^{x} f(t)dt,\ x \in I; \quad G(y) := \int_{y_\circ}^{y} \frac{dt}{g(t)},\ y \in J$$

Sei $I' \subset I$ *ein Intervall mit* $x_\circ \in I'$ *und* $\boxed{F(I') \subset G(J).}$ $\quad (*)$
Dann gibt es genau eine Lösung $\varphi : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ *von (1) mit* $\varphi(x_\circ) = y_\circ$.
Es gilt : $G\Big(\varphi(x)\Big) = F(x)$ *für alle* $x \in I'$.

Beweis :

beachte : G ist streng monoton : $G' = g$ und $g \neq 0$, somit ist $\varphi(x) = G^{-1}\Big(F(x)\Big)$
aus $(*)$ folgt $\operatorname{Bild} F \subset \operatorname{Def} G^{-1} = \operatorname{Bild} G$, so dass $G^{-1} \circ F$ Sinn macht.
$\longrightarrow$ genaueres siehe Übung!

$\square$

Beispiel :

$(*) \quad \boxed{y'(x) = y^2(x)}$

hier : $f(x) = 1,\ g(y) = y^2,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$
gesucht : Lösung φ von $(*)$ mit $\varphi(0) = c,\ c \in \mathbb{R}$

Rechte Seite $(x, y) \mapsto y^2$ genügt *lokaler Lipschitz Bedingung* auf $\mathbb{R}^2$
bzgl. der y-Variablen

$\overset{Satz 22.2}{\Longrightarrow}$ $\exists!$ Lösung φ lokal bei 0 definiert

(i) $c = 0 \quad \overset{Satz 22.2}{\Longrightarrow} \quad \varphi \equiv 0$ eindeutige Lösung (klar!)

(ii) $c > 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists$ Intervall $I_\circ$ um 0 und $\varphi : I \to \mathbb{R}$
mit $\varphi(0) = c,\ \varphi'(x) = \varphi^2(x)$

Annahme : $\varphi(x) \leq 0$ für **ein** $x \in I_\circ$

$\overset{\text{da } \varphi(0)>0}{\Longrightarrow} \quad \exists\, x_\circ$ mit $\varphi(x_\circ) = 0$

$\overset{\text{Eindeutigkeitssatz 22.1}}{\Longrightarrow} \quad \varphi = 0$ auf $I_\circ$! (Widerspruch!)

Also : $\varphi > 0$ auf $I_\circ$.

Wie groß ist $I_\circ$? Wie sieht φ aus ?

Man kann in 22.3 $J = (0, \infty)$ wählen,

$g(y) = y^2$ ist dort $\neq 0 \quad \Longrightarrow \quad G(y) = \int_c^y \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{c} - \frac{1}{y},\ y \in J;$

$F(x) = \int\limits_0^x dt = x.$

Es gilt : $G(J) = (-\infty, 1/c)$

$\Longrightarrow I' := (-\infty, 1/c)$ erfüllt $F(I') \subset G(J)$.

Somit ist die Lösung φ auf $(-\infty, 1/c)$ definiert. Nun betrachte

$$G\Big(\varphi(x)\Big) = F(x) \iff \frac{1}{c} - \frac{1}{\varphi(x)} = x$$

$$\iff \underline{\varphi(x) = \frac{c}{1-cx},\ x \in (-\infty, 1/c).}$$

(iii) $c < 0$:

analog : $\varphi : (\frac{1}{c}, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{c}{1-cx}$ für $x > 1/c$.

$\square$

Bemerkung :

Man sieht die Nützlichkeit von Satz 22.1 und Satz 22.2, da diese Sätze vorweg schon Informationen liefern.

2) Reduktion auf getrennte Veränderliche

(i) $\boxed{y'(x) = f\Big(a \cdot x + by(x) + c\Big)}$, $a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ b \neq 0,\ f$: Intervall $\longrightarrow \mathbb{R}$

Setze $\boxed{v(x) := ax + by(x) + c}$

$\Longrightarrow \quad v'(x) = a + bf\Big(v(x)\Big)$

beachte : die Anfangsbedingungen für y müssen auch transformiert werden!

(ii) $\boxed{y'(x) = f\Big(y(x)\Big/x\Big)}$

Setze $\boxed{u(x) := \ y(x)\Big/x}$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{aligned} u'(x) &= \tfrac{1}{x^2}\Big(x \cdot y'(x) - y(x)\Big) \\ &= \tfrac{1}{x} \cdot f(u(x)) - \tfrac{1}{x} \cdot u(x) \\ &= \tfrac{1}{x}\Big(f(u(x)) - u(x)\Big) \end{aligned}$$

Also $\quad u'(x) = A(x) \cdot B\Big(u(x)\Big)\,,\ A(x) := \frac{1}{x},\ B(u) := f(u) - u$

Beispiel :

$$y'(x) = 1 + \tfrac{1}{x}y(x) + \Big(\tfrac{1}{x}y(x)\Big)^2 \text{ für } x > 0 \quad \Big(f(u) := 1 + u + u^2\Big)$$

$$\overset{u(x)=y(x)/x}{\Longrightarrow} \quad \begin{aligned} u'(x) &= \tfrac{1}{x}\Big(1 + u(x) + u(x)^2 - u(x)\Big) \\ &= \tfrac{1}{x}\Big(1 + u^2(x)\Big) \\ &\Rightarrow \tfrac{u'(x)}{1+u^2(x)} = 1/x \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(\arctan u(x)\Big) = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\ln x$$

$$\Longrightarrow \quad u(x) = \tan\Big(c + \ln x\Big)$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{y(x) = x \cdot \tan\Big(x + \ln x\Big)},\ x > 0.$$

3) Lineare Differentialgleichungen 1^{ter} Ordnung

Seien gegeben : $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a,\, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

betrachte $y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)$ auf I

homogener Fall : $b \equiv 0$

Satz 22.4 :

Seien $x_\circ \in I,\ c_\circ \in \mathbb{R}$. Dann gibt es **genau eine** *Lösung des Anfangswertproblems*

$$y'(x) = a(x) \cdot y(x) \ \textit{mit}\ y(x_\circ) = c$$

Es ist $\quad y(x) \ = \ \exp\Big(\int\limits_{x_\circ}^{x} a(t)\,dt\Big) \cdot c_\circ.$

Beweis :

1) Eindeutigkeit : Satz 22.1!

2) Existenz : leite die Formel ab!

□

Konstruktion von Lösungen im inhomogenen Fall $b \neq 0 \longrightarrow$ "Variation der Konstanten"

Sei φ eine Lösung $\neq 0$ der homogenen Gleichung $y'(x) = a(x)\,y(x)$
(beachte : $\varphi \not\equiv 0 \Longrightarrow \varphi$ ist nirgends $= 0$ nach 22.1).
Bestimmung einer Lösung $\Psi : \ I \to \mathbb{R}$ von

$$(*) \qquad y'(x) = a(x) \cdot y(x) + b(x)$$

durch den
Ansatz : $y(x) = u(x) \cdot \varphi(x)$ (multipliziere φ mit einem von x abhängigen Faktor)

Dann :

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= u'(x) \cdot \varphi(x) + u(x) \cdot \varphi'(x) \\ &= u'(x) \cdot \varphi(x) + u(x) \cdot a(x) \cdot \varphi(x) \\ &\overset{!}{=} a(x) \cdot u(x) \cdot \varphi(x) + b(x) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad u'(x) = b(x) \Big/ \varphi(x)$$

$$\Longrightarrow \qquad u(x) = \left(\text{Stammfkt. zu } \frac{b}{\varphi}\right) + \text{const}$$

Probe : definiere u durch diese Gleichung und setze $\Psi(x) = u(x)\,\varphi(x) \Longrightarrow \Psi$ löst $(*)$.

Nach 22.1 hat $*$ bei Vorgabe eines Anfangswerte $y(x_\circ) = c_\circ$ höchstens eine Lösung. Beachtet man noch 22.4, also die Formel für φ, so folgt :

Satz 22.5 :

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a,\, b : \ I \to \mathbb{R}$ seien stetig. Dann gibt es zu jedem $x_\circ \in I$ und jedem $c_\circ \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $\Psi : \ I \to \mathbb{R}$ von

$$\begin{aligned} y(x_\circ) &= c_\circ \\ y'(x) &= a(x)\,y(x) + b(x) \ \ \textit{auf } I. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \Psi(x) &= \varphi(x)\Big(c_\circ + \int\limits_{x_\circ}^{x} \tfrac{b(t)}{\varphi(t)}\,dt\Big), \\ \varphi(x) &= \exp\Big(\int\limits_{x_\circ}^{x} a(t)\,dt\Big) \qquad \Big(\Longrightarrow \varphi(x_\circ) = 1\Big) \end{aligned}}$$

Beispiel :

$y'(x) = 2x \cdot y(x) + x^3, \quad y(0) = c_\circ$

Mit den Bezeichnungen aus dem Satz gilt :

$$\varphi(x) = \exp\Big(\int_{x_\circ}^{x} 2t\,dt\Big) = \exp t^2\Big|_{x_\circ}^{x} = e^{x^2}$$

löst für $x_\circ = 0$ das homogene Problem $\varphi' = a \cdot \varphi$, $\varphi(0) = 1$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \Psi(x) &= e^{x^2} \cdot \Big(c_\circ + \underbrace{\int_0^x e^{-t^2} \cdot t^3\,dt}_{\overset{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1+x^2)\,e^{-x^2}}\Big) \\ &= \Big(c + \frac{1}{2}\Big)\,e^{x^2} - \frac{1}{2}\,(1 + x^2). \end{aligned}$$

4) Lineare Systeme 1^{ter} Ordnung

(enthält als Spezialfall lineare Gleichungen n^{ter} Ordnung (via Reduktion)).

4 a) Allgemeiner Fall :

Voraussetzungen :

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $A \in C^\circ(I, \mathbb{R}^n)$, d.h. $A(x) = \Big(a_{ij}(x)\Big)_{1 \le i,j \le n}$ mit stetigen Funktionen $a_{ij} : I \to \mathbb{R},\ b \in C^\circ(I, \mathbb{R}),\ b = (b_1, \ldots, b_n)$.

Inhomogenes System :

$$\begin{aligned} (1) \qquad y'(x) &= A(x)\,y(x) + b(x) \\ \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Homogenes Sysstem :

$$(2) \quad y'(x) = A(x)\, y(x)$$

bemerke : Satz 22.2 $\Longrightarrow$ lokale Existenz von Lösungen.

Wir werden zeigen :

- Lösungen zu (1), (2) existieren nach dem Zusatz zu 22.2 auf ganz I
- vollständige Beschreibung der Lösungsmenge !

Notation :

Differentialoperator

$L : C^1(I, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\circ(I, \mathbb{R}^n)$, $L := \frac{d}{dx} - A(x)$,
d.h. $L(y)(x) := y'(x) - A(x)\, y(x)$

bemerke :

- L ist ein linearer Operator
- Lösungsmenge des homogenen Systems
  $=$ Nullraum $N(L)$ von L $\Big(= \{y \in C^1(I, \mathbb{R}^n) : L(y) = 0\}\Big)$

Satz 22.6 :

$$\boxed{\dim N(L) \ = \ n}$$

D.h. : *(i)* *Es gibt n linear unabhängige Lösungen des homogenen Problems*
(ii) $n+1$ *Lösungen des homogenen Problems sind linear abhängig.*

Wir brauchen ein

Lemma :

Seien $y^1, \ldots, y^n \in N(L)$, $y^i = (y^i_1, \ldots, y^i_n)$
Man setzt $\Delta(x) = \det\Big(y^1(x) \ldots y^n(x)\Big)$ (y^i als Spaltenvektoren)
Dann gilt :

i) $\Delta(x_\circ) = 0$ für ein $x_\circ \iff \Delta \equiv 0$ auf I
ii) $y^1, \ldots, y^n$ linear unabhängig $\iff \Delta$ ist nirgends 0

Beweis (Lemma) :

i) $\quad \Delta(x_\circ) = 0$ für ein $x_\circ$

$\iff \quad y^1(x_\circ), \ldots, y^n(x_\circ) \in \mathbb{R}^n$ sind linear abhängig

$\iff \quad \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ nicht alle 0 mit $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i\, y^i(x_\circ) = 0.$

$y(x) := \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, y^i(x)$ löst $L(y) = 0$ auf I.

Aus $y(x_\circ) = 0$ folgt nach 22.1 $y(x) = 0\ \forall\, x \in I$.

Das bedeutet $\Delta(x) = 0$ auf I.

ii) $\quad \Delta = 0$ für ein $x_\circ$

$\overset{\text{i)}}{\iff} \quad y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, y^i \equiv 0$ auf I mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ nicht alle 0

$\iff \quad y^1, \ldots, y^n$ linear abhängig.

Negation dieser Aussage ergibt ii)

$\square$

Beweis von 22.6 :

i) Sei $e_1, \ldots, e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$, $x_\circ \in I$ beliebig. Nach 22.2 und der anschließenden Verschärfung, $y'(x) = A(x)\, y(x) =: F(x, y(x))$ mit $|F(x,y) - F(x,\tilde{y})| \leq \|A(x)\| \cdot |y - \tilde{y}|$ (die wir jetzt zum ersten Mal brauchen!), gibt es $y^1, \ldots, y^n \in N(L)$ mit $y^i(x_\circ) = e_i$.
Es ist

$$\Delta(x_\circ) = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

also $y^1, \ldots, y^n$ linear unabhängig.

ii) Seien $y^1, \ldots, y^m \in N(L)$ mit $m > n,\ x_\circ \in I$.

$\implies \quad \exists\, c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ nicht alle 0 mit $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i\, y^i(x_\circ) = 0,$
da $y^1(x_\circ, \ldots, y^m(x_\circ)$ in $\mathbb{R}^n$ linear abhängig sind.

$y := \sum\limits_{i=1}^{m} c_i\, y^i$ gehört zu $N(L)$ mit $y(x_\circ) = 0 \overset{22.1}{\implies} y \equiv 0$

$\iff y^1, \ldots, y^m$ linar abhängig.

$\square$

Definition 22.2 :

Eine Basis des Nullraumes von L heißt ein **Fundamentalsystem** *zum homogenen System.*

Bemerkung :

Für die *homogene Gleichung* $\varphi'(x) = a(x)\,\varphi(x)$ haben wir explizite Lösungsformeln, im Fall des Systems $y'(x) = A(x)\,y(x)$ gibt es solche Formeln nur, wenn die Matrix *konstant* ist (s. später).

Beispiel :

$$\left\{ \begin{array}{ccr} y_1' & = & -\alpha\, y_2 \\ y_2' & = & \alpha\, y_1 \end{array} \right\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Lösungen :

z.B. $\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} \cos & \alpha x \\ \sin & \alpha x \end{pmatrix}, \ \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -\sin & \alpha x \\ \cos & \alpha x \end{pmatrix}$

mit $\det\Big(\varphi_1(x)\ \varphi_2(x)\Big) = \cos^2(\alpha x) + \sin^2(\alpha x) \equiv 1$

$\Longrightarrow\ \varphi_1, \varphi_2$ bilden Fundamentalsystem

$\longrightarrow$ Übung :

Umformung homogener linearer Gleichungen der Ordnung 2, 3 in Systeme 1^{ter} Ordnung, Fundamentalsysteme?

Wir gehen zurück zum inhomogenen System (1) und bestimmen Lösungen mit Konstantenvariation.

Satz 22.7 :

i) Sei $y^1, \ldots, y^n$ ein Fundamentalsystem zum homogenen System. Die reellen Funktionen $c_1, \ldots, c_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ seien Lösungen von

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y^j(x) = b(x)$$

auf I. Dann ist $y^\circ(x) := \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y^i(x)$ Lösung von (1) (ein sogenannte spezielle Lösung).

ii) Jede Lösung y von (1) hat die Form $y = y^\circ + h$ mit $L(h) = 0$.

Bemerkung :

Da $y^1(x), \ldots, y^n(x)$ zu jeder Zeit x linear unabhängig sind, werden die Zahlen $c_i'(x)$ durch $(*)$ eindeutig festgelegt. Nun bestimme man Stammfunktionen!

Beweis :

(ii) klar!

(i) Seien die c_i gemäß$(*)$ berechnet

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(\sum_{i=1}^n c_i(x)\, y^i(x)\Big) &= \sum_{i=1}^n c_i'(x)\, y^i(x) + \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{d}{dx}\, y^i(x) \\ &= b(x) + \sum_{i=1}^n c_i(x)\, A(x)\, y^i(x) \\ &= b(x) + A(x)\, \Big(\sum_{i=1}^n c_i(x)\, y^i(x)\Big)\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung :

Zur Lösung des AWP

$$\begin{aligned} y(x_\circ) &= \eta \in \mathbb{R}^n \\ y'(x) &= A(x)\, y(x) + b\,(x)\end{aligned}$$

wähle man ein Fundamentalsystem $y^1, \ldots, y^n$ und berechne eine spezielle Lösung y°; dann setze man

$$y(x) = y^\circ(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i\, y^i(x),$$

wobei die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ als Lösungen von $y^\circ(x_\circ) + \sum_{i=1}^n \alpha_i\, y^i(x_\circ) = \eta$ zu bestimmen sind.

Beispiel :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_1' &=& -y_2 \\ y_2' &=& y_1 + x \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Die Funktionen $(\cos x, \sin x)$, $(-\sin x, \cos x)$ bilden ein Fundamentalsystem zum homogenen Problem.

Ansatz :

$$\begin{aligned}
& c_1'(x)\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix} + c_2'(x)\begin{pmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{pmatrix} &=& \begin{pmatrix}0\\ x\end{pmatrix}\\
\Longleftrightarrow\quad & \begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1'(x)\\ c_2'(x)\end{pmatrix} &=& \begin{pmatrix}0\\ x\end{pmatrix}\\
\Longleftrightarrow\quad & \begin{pmatrix}c_1'(x)\\ c_2'(x)\end{pmatrix} &=& \begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ x\end{pmatrix}\\
& &=& \begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ x\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also :

$$c_1'(x) = x\cdot\sin x,\ c_2'(x) = x\cdot\cos x$$

Wähle deshalb

$$c_1(x) = \sin x - x\cdot\cos x,\ c_2(x) = \cos x + x\cdot\sin x.$$

Es folgt dann als spezielle Lösung :

$$y_\circ(x) = (\sin x - x\ \cos x)\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix} + (\cos x + x\cdot\sin x)\begin{pmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\ 1\end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$x \mapsto \begin{pmatrix}-x\\ 1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{pmatrix},\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}.$$

□

4 b) Spezialfall : Lineare Gleichungen höherer Ordnung

Solche Gleichungen lassen sich in Lineare Systeme 1^{ter} Ordnung transformieren, so dass man direkt die Sätze 22.6 und 22.7 anwenden kann. Die hierbei auftretenden Matrizen haben eine sehr spezielle Gestalt.

Notation :

$I\subset\mathbb{R}$ Intervall, $a_\circ,\ldots,a_{n-1},\, b\in C^\circ(I,\mathbb{R}),\ y: I\to\mathbb{R}$

1) homogene Gleichung : $\quad y^{(n)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)}(x)$

2) inhomogene Gleichung : $y^{(n)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)}(x) + b(x).$

Beispiel :

$$y^{(3)}(x) = x^2\cdot y^{(2)}(x) + e^x\cdot y(x) + \sinh x$$

Satz 22.8 :

(i) *Sei* $H = \{\varphi \in C^n(I,\mathbb{R}) : \varphi$ *löst (1)* $\}$. *Dann ist* $\dim H = n$.

D.h. : *Es gibt n linear unabhängige Lösungen von (1),*
$m > n$ *Lösungen sind stets voneinander abhängig.*

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in H$ *sind* **genau dann linear unabhängig**,
wenn für ein $x \in I$ *(alle* $x \in I$*) gilt :*

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \neq 0$$

Man nennt dann $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *ein Fundamentalsystem.*

(ii) *Sei* $\Psi_\circ$ *eine spezielle Lösung von (2). Dann gilt :*

Lösungsmenge von (2) $= \Psi_\circ + H$.

Beweis :

Mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_\circ(x) & a_1(x) & \ldots & \ldots & a_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

und

$$\overline{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

betrachte

$$\begin{array}{llll} (1)^* & Y'(x) = A(x)Y(x) & & \text{und} \\ (2)^* & Y'(x) = A(x)Y(x) + \overline{b}(x) & & \end{array}$$

Dann gilt :

$$\begin{aligned} & Y = (y_\circ, \ldots, y_{n-1}) \text{ löst } (1)^* \text{ bzw. } (2)^* \\ \Longleftrightarrow \quad & y_i = y'_{i-1} \text{ für } i \leq n-1 \text{ und } y_\circ \text{ löst } (1) \text{ bzw. } (2). \end{aligned}$$

Daraus folgen mit Satz 22.6 und 22.7 alle Aussagen.

□

Bemerkungen :

1) Für die spezielle Lösung $\Psi_\circ$ des inhomogenen Systems macht man den Ansatz

$$c_1(x)\,\varphi_1(x) + \ldots + c_n(x)\,\varphi_n(x) = \Psi_\circ(x)$$

mit einer Basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ von H. Die Funktionen c_i ergeben sich aus

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) \begin{pmatrix} \varphi_i(x) \\ \varphi_i'(x) \\ \vdots \\ \varphi_i^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

($\varphi_i^{(j)}$ für $j = 0, \ldots, n-1$ und $b(x)$ sind Spaltenvektoren)

2) Behandlung des AWP :

Vorgabe von $\varphi(x_\circ), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_\circ)$

$$\Longrightarrow \varphi = \psi_\circ + \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i \varphi_i$$

$\tilde{c}_i$ derart dass AWP erfüllt.

Für lineare Gleichungen der Ordnung $n > 1$ mit *variablen* Koeffizienten gibt es *kein* Patentrezept zur Bestimmung eines Fundamentalsystems, dasgleiche gilt für Systeme mit variabler Koeffizientenmatrix. Aussagen sind manchmal für Gleichungen 2^{ter} Ordnung möglich. Hier gilt : *Hat man eine nichttriviale Lösung φ_1 des homogenen Problems bestimmt, so läßt sich diese zu einem Fundamentalsystem ergänzen.*

Satz 22.9 :

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b \in C^\circ(I, \mathbb{R})$ und $\varphi: I \to \mathbb{R}$ sei Lösung von

$$(*) \qquad y''(x) + a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = 0$$

Auf dem Intervall $J \subset I$ sei φ **ohne** *Nullstelle.*

Ist dann u eine **nicht-konstante** *Lösung der Gleichung.*

$$(**) \qquad u''(x) + \Big(2 \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + a(x)\Big) \cdot u'(x) = 0 \qquad (\textit{Lösung davon s. später})$$

auf J, so ist

$$\Psi : J \to \mathbb{R}, \;\; \Psi := u \cdot \varphi,$$

eine **von φ unabhängige Lösung**, *d.h. $\{\varphi, \Psi\}$ ist ein Fundamentalsystem auf J.*

Beweis :

Man setzt $\Psi = \varphi \cdot u$

$\Longrightarrow \quad \Psi' = \varphi' u + u' \varphi$ und $\Psi'' = \varphi'' u + u'' \varphi + 2u'\,\varphi'$;

benutze $(*)$ für φ

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \Psi'' + a \cdot \Psi' + b\,\Psi &= \underbrace{[-u\overbrace{(a\varphi' + b\,\varphi)}^{\overset{(*)}{=}-\varphi''} + u''\varphi + 2u'\,\varphi']}_{=\Psi''} + a(\underbrace{\varphi' u + u'\varphi}_{=\Psi'}) + b\,u\,\varphi \\
&= u'' \cdot \varphi + au'\varphi + 2u'\varphi' \\
&= \varphi\left[u'' + u'\Big(a + 2\tfrac{\varphi'}{\varphi}\Big)\right]
\end{aligned}$$

Ergebnis :

$$\Psi \text{ löst } (*) \quad \Longleftrightarrow \quad [\ldots] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u \text{ erfüllt } (**).$$

Probe der Linearen Unabhängigkeit :

$$\det \begin{pmatrix} \varphi & u \cdot \varphi \\ \varphi' & u'\varphi + \varphi' u \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad \varphi^2 \cdot u' + \varphi'\varphi u - u\varphi\varphi' = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad u' \cdot \varphi^2 = 0 \\
&\overset{\varphi^2>0}{\Longleftrightarrow} \quad u' = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad u = \text{const.}
\end{aligned}$$

u wird aber als nicht-konstant angenommen.

□

Bemerkung : zu Differentialgleichung $(**)$:

$(**)$ tritt als zusätzliche Differentialgleichung bei der Anwendung des Verfahrens auf. Diese Gleichung läßt sich aber mittels Reduktion der Ordnung unschwer lösen :

$$v := u' \quad \Longrightarrow \quad v' + \Big(2 \cdot \frac{\varphi'}{\varphi} + a\Big) \cdot v = 0$$

$\Longrightarrow$ homogene Gleichung 1^{ter} Ordnung für v

$$\overset{22.4}{\Longrightarrow} \quad v(x) = \exp\Big(\int_{x_\circ}^{x} 2\frac{\varphi'}{\varphi} + a\,dt\Big)$$

$$\Longrightarrow \quad u(x) = \int_{x_\circ}^{x} v(t)\,dt.$$

□

Beispiele und Bemerkungen zu Linearen Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung mit variablen Koeffizienten

betrachte $y''(x) + a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = 0$ auf $I \subset \mathbb{R}$.

bisherige Annahme : a, b nur stetig.

Macht man sehr **viel stärkere Annahmen**, so gelingt es manchmal, eine nicht-triviale Lösung φ von $(*)$ zu konstruieren. Dann kann man unter Umständen Satz 22.9 benutzen und erhält ein Fundamentalsystem, also mit 22.8 eine Übersicht über die Lösungsgesamtheit auch im inhomogenen Fall. Das Stichwort ist

Potenzreihenansatz : $(\longrightarrow$ Übung!)

Voraussetzung :

$$a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x - x_\circ)^k, \; b(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x - x_\circ)^k,$$

d.h. : die Koeffizienten $a(x), b(x)$ in $(*)$ lassen sich um $x_\circ \in I$ als konvergente Potenzreihen schreiben.

Dann setzt man

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x - x_\circ)^k,$$

d.h. *man geht davon aus, dass es eine analytische Lösung gibt.*

Einsetzen + Identitätssatz

$\Longrightarrow$ Rekursionsformeln für γ_k in Termen von α_k, β_k

danach :

Probe, ob $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x - x_\circ)^k$ auf Umgebung von $x_\circ$ konvergent ist !

falls ja :

Rechnungen wie

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x - x_\circ)^k \Big)'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\gamma_k (x - x_\circ)^{k-2}$$

sind erlaubt.

$\Longrightarrow$ $y(x)$ löst die Differentialgleichung.

Übung :

(1) **Legendre-DGL. :**

$$\boxed{(1+x^2)\,y''(x) - 2x\cdot y'(x) + n(n+1)\,y(x) = 0 \quad \text{auf } (-1,1),\ n\in\mathbb{N}_\circ}$$

(kommt in der theor. Physik vor)

Potenzreihenansatz liefert :

$\Longrightarrow$ $\boxed{P_n(x) = \frac{1}{2^n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n}$ Legendre-Polynom (der Ordnung n).

(2) **Hermite-DGL. :**

$$\boxed{y''(x) - 2xy'(x) + 2n\,y(x) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}_\circ}$$

Potenzreihenansatz ergibt :

$\Longrightarrow$ $\boxed{H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}}$ Hermite-Polynom (der Ordnung n).

P_n bzw. H_n sind Lösungen zu (1) bzw. (2) für das jeweilige n.

Wir konstruieren für die Legendre-Dgl. mit $n=1$ ein Fundamentalsystem :

$$\begin{aligned} & (1-x^2)\,y''(x) - 2x\,y'(x) + 2\cdot y(x) &= 0 \quad \text{auf } (-1,1)\\ \Longleftrightarrow\quad & y''(x) - \tfrac{2x}{1-x^2}\,y'(x) + \tfrac{2}{1-x^2}y(x) &= 0 \quad \text{auf } (-1,1)\end{aligned}$$

bekannte Lösunge : $\varphi(x) = \frac{1}{2}\cdot 2x = x = P_1(x)$

Ansatz : $\Psi(x) = u(x)\cdot x$ auf $(0,1)$ (dort ist $\varphi\neq 0$!)

$\Longrightarrow$ Dgl. für u gemäß 22.9 :

$$u''(x) + \left(2\frac{1}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\right)u'(x) = 0$$

oder mit $v := u'$:

$$v'(x) + \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\right)v(x) = 0$$

Lösungsformel : $v(x) = \exp\Big(\text{Stammfunktion zu } \frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\Big)$ (vgl. Satz 22.4)

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad v(x) &= \exp\Big(-2\cdot\ln x - \ln(1-x^2)\Big) = \tfrac{1}{x^2\cdot(1-x^2)}\\ &= \tfrac{1}{x^2} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1-x} + \tfrac{1}{1+x}\right)\\ \Longrightarrow\quad u(x) &= \int v(x)\,dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ \ln\frac{1+x}{1-x}\end{aligned}$$

Es folgt : $\quad \Psi(x) = x \cdot u(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1.$

Bei der Anwendung von 22.9 mußten wir uns auf ein Intervall $J \subset (-1,1)$ ohne Nullstelle von $\varphi(x) = x$ beschränken, also etwa auf $(0,1)$.

Eine Probe zeigt aber :

> $\Psi(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1$ ist auf $(-1,1)$ definierte Lösung der Dgl. und spannt mit φ den Lösungsraum auf.

5) Lineare Systeme 1$^{\text{ter}}$ Ordnung mit konstanten Koeffizienten und (lineare Gleichungen n$^{\text{ter}}$ Odnung mit konstanten Koeffizienten)

Sind im Prizip die einzigen Fälle, für die es systematische Methoden zur Bestimmung von Fundamentalsystemen gibt.

Betrachte das System

(1) $\quad y' = A\,y, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

mit **konstanter** $n \times n$ - Matrix $A = (a_{ij})$;

Lösungen existieren auf ganz $\mathbb{R}$ (nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

Fall $n = 1$:

$$y' = a \cdot y \text{ mit } a \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = e^{ax} \text{ ist Lösung (dim des Lösungsraumes} \equiv 1)$$

Deshalb machen wir den Exponentialansatz :

(2) $\quad \boxed{y(x) = e^{\lambda x}\, v,\ \lambda \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$.

dann ist :

$$y'(x) = \lambda \cdot y(x),$$

also gilt :

$$\begin{aligned} & y'(x) = A\,y(x) \\ \Longleftrightarrow \quad & \lambda\, e^{\lambda x}\, v = e^{\lambda x} A\, v \\ \Longleftrightarrow \quad & \boxed{Av = \lambda v} \qquad v \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda \end{aligned}$$

D.h. : Wir müssen zur Lösung von (1) mit dem Ansatz (2) **Eigenwerte** von A und **Eigenvektoren** bestimmen.

Da die Eigenwerte reeller Matrizen auch komplex sein können, betrachten wir zunächst die

komplexe Situation : $\begin{cases} A \in \mathbb{C}^{n \times n} & \text{komplexe } n \times n \text{ Matrix} \\ y :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, & y' = A\,y \text{ auf } \mathbb{R} \end{cases}$

Dann gilt wie oben mit $\lambda \in \mathbb{C},\ v \in \mathbb{C}^n$:

$$\boxed{y(x) = e^{\lambda x} v \text{ Lsg.} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \text{ E.W. von } A,\ v \text{ E.V. zu } \lambda}$$

Die Eigenwerte von A ergeben sich als Nullstellen des

charakteristischen Polynoms $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda\ \mathrm{Id})$.

$P_A(\lambda)$ ist ein Polynom vom Grad n über $\mathbb{C}$

$\Longrightarrow$ $\exists\ n$ Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ von $P_A(\lambda)$ nicht notwendig alle verschieden, d.h. es können Vielfachheiten > 1 auftreten.

Fassen wir die Ergebnisse in folgenden Satz zusammen :

Satz 22.10 :

Die Funktion $y(x) = e^{\lambda x}\, v$ ist Lösung genau dann, wenn $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $v \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor ist. Die Lösungen $e^{\lambda_k x}\ v_k$ sind linear unabhängig über $\mathbb{C}$ genau dann, wenn die Vektoren v_k linear unabhängig sind.
Speziell :

$$\lambda_k \neq \lambda_\ell \quad \Longrightarrow \quad y_k(x) = e^{\lambda_k x} v_k,\ y_\ell(x) = e^{\lambda_\ell x} v_\ell \ \underline{\textit{sind linear unabhängig}}.$$

Beweis der letzten Aussage :

Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C},\ M \leq n$, komplexe Eigenwerte (nicht notwendig alle verschieden), $w_1, \ldots, w_M$ zugehörige E.V. $\in \mathbb{C}^n$. Setze

$$y_\ell(x) = e^{\alpha_\ell \cdot x} w_\ell \quad \text{und} \quad y(x) = \sum_{\ell-1}^{M} \beta_\ell\, y_\ell(x) \text{ mit Koeffizienten } \beta_\ell \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt :

$$y' = A\,y \quad \text{und} \quad y(0) = \sum_{\ell=1}^{M} \beta_\ell\, w_\ell.$$

Außdem :

$\{w_1, \ldots, w_M\}$ linear abhängig

$\Longleftrightarrow$ $y(0) = 0$ für passende Wahl von $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{C}$ nicht alle 0

$\Longleftrightarrow$ $y \equiv 0$ nach dem Eindeutigkeitssatz 22.1, der auch in der $\mathbb{C}^n$ – wertigen Situation gilt (da $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$)

$\Longleftrightarrow$ $y_1, \ldots, y_M$ sind linear abhängig

Dass für Eigenwerte $\mu \neq \lambda$ die Lösung linear unabhängig sind, folgt aus der Unabhängigkeit der Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten.

$\square$

Korollar ("Idealfall") :

Besitzt A **n linear unabhängige Eigenvektoren** $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (nicht notwendig verschieden), so bilden die Funktionen $\mathbf{y_k(x) = e^{\lambda_k x} v_k}$, $k = 1, \ldots, n$, ein **Fundamentalsystem über** $\mathbb{C}$, d.h. jede Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ läßt sich aus $y_1, \ldots, y_n$ erzeugen,. Das gilt insbesondere dann, wenn es n verschiedene Eigenwerte gibt.

Bemerkung :

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ kommt nur 1 als Eigenwert mit Vielfachheit n vor, der Eigenraum von 1 ist trivialerweise n dimensional.

Wie kommt man zu reellen Lösungen, wenn A reell ist?

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ \lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $A,\ v \in \mathbb{C}^n$ Eigenvektor zu λ

$$\Longrightarrow \quad y(x) = e^{\lambda x}\, v \text{ ist Lösung.}$$

Schreibe

$$\lambda = \alpha + i\beta,\ \alpha,\, \beta \in \mathbb{R};\ v = u + iw,\ u,\, w \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ e^{\lambda x}\, v &= e^{\alpha x}\,(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))\,(u + iw) \\ &= \underbrace{e^{\alpha x}\,(\cos(\beta x)u - \sin(\beta x)w)}_{:=z(x)} + i\,\underbrace{e^{\alpha x}\,(\sin(\beta x)u + \cos(\beta x)w)}_{=:z^*(x)} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow z'(x) = Az(x),\ \ {z^*}'(x) = Az^*(x)$$

Ein komplexer Eigenwert liefert also **zwei** reelle Lösungen.

beachte :

$$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ Eigenwert},\ v \text{ Eigenvektor zu } \lambda \quad \Longrightarrow \quad \overline{\lambda} \text{ Eigenwert},\ \overline{v} \text{ Eigenvektor zu } \overline{\lambda}$$

für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist $\lambda \neq \overline{\lambda}$, also v und $\overline{v}$ sind linear unabhängig über $\mathbb{C}$, d.h. Re v, Im v sind linear unabhängig über $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow \quad z,\ z^*$ sind linear unabhängig über $\mathbb{R}$ (der E.W. $\overline{\lambda}$ ergibt $-z,\ -z^*$ als reelle Lösungen!)

Satz 22.11 : *(Reeller Fall)*

Sei A **reelle** *$n \times n$ Matrix, $\lambda = \mu + iv$* **komplexer** *E.W., $v = a + ib \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger E.V. Dann sind*

$$(3) \qquad \begin{cases} z(x) &= \; Re\ (e^{\lambda x} v) \; = \; e^{\mu x}\Big(\cos\nu x \cdot a - \sin\nu x \cdot b\Big) \\ z^*(x) &= \; Im\ (e^{\lambda x} v) \; = \; e^{\mu x}\Big(\sin\nu x \cdot a + \cos\nu x \cdot b\Big) \end{cases}$$

zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Lösungen von (1) mit Werten in $\mathbb{R}^n$.

□

Damit läßt sich die reelle Situation so beschreiben

Korollar : "es gibt genügend viele E.V."

Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $s_1, \ldots, s_q \in \mathbb{R}$. Seien $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{C}^n$ (n=2p+q) E.V.'en zu $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, und $d_1, \ldots, d_q$ E.V.'en zu $s_1, \ldots, s_q$. Sind dann die Vektoren $\mathrm{Re}\, v_1, \ldots$, $\mathrm{Re}\, v_p$, $\mathrm{Im}\, v_1, \ldots$, $\mathrm{Im}\, v_p$, $d_1, \ldots, d_q$ **linear unabhängig über** $\mathbb{R}$, so gewinnt man ein reelles Fundamentalsystem durch Benutzen von (3) (für v und λ) und (2) (für d und s).

Beispiel :

$$\begin{cases} y_1' &= \; y_1 - 2y_2 \\ y_2' &= \; 2y_1 - y_3 \\ y_3' &= \; 4y_1 - 2y_2 - y_3 \end{cases} \quad , \quad \text{also}$$

$$y'(x) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} y(x)$$

$$P_A(\lambda) \;=\; \det\,(A - \lambda\ \mathrm{Id}) \;=\; (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 2)$$

$$\text{Eigenwerte :} \quad \underbrace{-\frac{1}{2} + i\,\frac{1}{2}\sqrt{7}}_{=\,\lambda} \quad , \quad \underbrace{-\frac{1}{2} - i\,\frac{1}{2}\sqrt{7}}_{=\,\overline{\lambda}} \quad , \quad \underbrace{1}_{=\,s}$$

$$\text{Eigenvektoren :} \quad \underbrace{\Big(\frac{3}{2} + \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\sqrt{7}, 2, 4\Big)}_{=v} \quad , \quad \underbrace{\Big(\frac{3}{2} - i\,\frac{1}{2}\sqrt{7}, 2, 4\Big)}_{=\,\overline{v}} \quad , \quad \underbrace{\Big(1, 0, 2\Big)}_{=\,d}$$

Lösungen dazu :

$$y(x) \quad = \quad e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z(x) \quad = \quad \mathrm{Re}(e^{\lambda x} v) \quad = \quad e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}x\right) \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}x\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$z^*(x) \quad = \quad \mathrm{Im}(e^{\lambda x} v) \quad = \quad e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}x\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{7}x\right) \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

weitere Beispiele $\longrightarrow$ Übungen !

Problem :

was macht man in Fällen, wo sich nicht genügend viele linear unabhängige E.V.'en ausrechnen lassen?

Beispiel :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} , \; P_A(\lambda) \; = \; (\lambda+1)^2$$

einziger E.W. -1 mit Vielfachheit 2, nur ein E.V., nämlich $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Hier versagt offensichtlich das Korollar, und das ist immer der Fall, wenn

$$\dim(\text{Eigenraum zu } \lambda) < \text{Vielfachheit von } \lambda \text{ in } P_A.$$

1. Möglichkeit : "Jordan-Form"

Bringe A auf Jordan-Form und erhalte daraus Formeln für ein Fundamentalsystem ($\rightarrow$ Literatur).

2. Möglichkeit : "Exponentialfunktion für Matrizen"

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Man setzt

$$\boxed{\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, A^k},$$

wobei A^k das *k-fache Matrizenprodukt* bezeichnet. Wählen wir

$$\|A\| := \sup_{|v|\le 1} |Av| \quad \text{(Operatornorm)},$$

so ist

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k,$$

woraus die Konvergenz der Reihe folgt.

Sodann rechnet man nach :

i) $e^A := \exp(A)$ ist immer regulär : $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

ii) $\exp\begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_n} \end{pmatrix}$

iii) $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}, \quad s,\ t \in \mathbb{R}$

iv) $e^{A+s\,\mathrm{id}} = e^s e^A, \quad s \in \mathbb{R}$

v) $AB = BA \quad \Longrightarrow \quad e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$

vi) S regulär $\quad \Longrightarrow \quad Se^A S^{-1} = \exp(SAS^{-1})$

vii) $\left.\begin{array}{l} A \text{ nilpotent, d.h.} \\ A^m = 0 \text{ für ein } m \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad e^A = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} A^k$

viii) $t \mapsto e^{tA}$ ist diffenzierbar mit

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = Ae^{tA}}$$

Satz 22.12 :

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \eta_\circ \in \mathbb{R}^n$ *und* $t_\circ \in \mathbb{R}$.

Die **eindeutige Lösung** *des linearen Systems*

$$\begin{aligned} y(t_\circ) &= \eta_\circ \\ y'(t) &= Ay(t),\ t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ist

$$t \mapsto \quad \underbrace{\exp\Big((t-t_\circ)A\Big)}_{Matrix}\ (\eta_\circ)$$

Beweis :

Eindeutigkeit klar! Nun zeige, dass diese Funktion das AWP löst.

Korollar :

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Ein **Fundamentalsystem** zu $y' = A\,y$ wird gegeben durch

$$t \mapsto \exp(tA)e_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

wobei $\{e_i\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet (i.A. die kanonische Basis).

Beispiel :

A <u>nilpotent</u>, $A^m = 0$

$$\Longrightarrow \qquad t \mapsto \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} t^k A^k(e_i),\ i = 1, \ldots, n$$

ist Fundamentalsystem.

Bemerkung :

Die explizite Berechnung von e^{tA} ist i.a. nicht möglich; um zu verwertbaren Ergebnissen zu gelangen, ist man gezwungen, auf die Jordan'sche Normalform von A zurückzugehen $\quad$ ($\longrightarrow$ Literatur!)

Lineare Gleichungen n$^{\text{ter}}$ Ordnung mit konstanten Koeffizienten

(1) $\quad y^1(n) + a_{n-a}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \ldots + a_1\, y' + a_\circ\, y = 0$

mit $a_\circ, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ für $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$\Updownarrow$

$$(1)^* \quad Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \cdot Y \qquad \text{für } Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

beachte :

$$P_A(\lambda = (-1)^n \Big\{ \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_\circ \Big\} \quad (\underline{\text{Polynom über } \mathbb{C}})$$

Das charakteristische Polynom der Matrix A ergibt sich als Koeffizientenpolynom der Gleichung (1). Durch Spezialisieren der allgemeinen Ergebnisse auf $(1)^*$ bekommt man

Satz 22.13 : *(Fundamentalsystem zu (1))*

i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ Nullstelle von P_A mit Vielfachheit k. Dann sind die Funktionen $e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$ linear unabhängige Lösungen von (1).

ii) Verfährt man gemäß(i) für die verschiedenen Nullstellen λ von P_A, so bekommt man ein komplexes Fundamentalsystem.

iii) Reeller Fall : Seien $a_\circ, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.
Ist $\lambda = \mu + i\nu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ Nullstelle von P_A ($\Longrightarrow \overline{\lambda}$ ebenfalls Nullstelle), so spaltet man die Lösung aus (i) in Re und Im auf und erhält die 2^k reellen Funktionen

$$\boxed{x^q e^{\mu x} \cos(\nu x),\ x^q e^{\mu x} \sin(\nu x),\ q = 0, \dots, k-1}$$

(Die zu $\overline{\lambda}$ gehörigen komplexen Lösungen liefern dieselben reellen Lösungen und bleiben deshalb unberücksichtigt!).
Ist α reelle Nullstelle mit Vielfachheit ℓ, so bekommt man daraus die Lösungen

$$\boxed{x^p\ e^{\alpha x},\ p = 0, \dots, \ell - 1}\ .$$

Verfährt man so für alle Nullstellen, so ergibt sich ein reelles Fundamentalsystem.

Bemerkung :

Man kann 22.13 ohne Rückgriff auf Jordan-Formen direkt beweisen.

Beispiel :

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 2y^{(3)} - 4y'' + 8y' + 16y \equiv 0$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^5 + 4\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 16 \\ &= (\lambda+2)^3\,(\lambda^2 - 2\lambda + 2) \\ &= (\lambda+2)^3\,(\lambda - 1 + i)\,(\lambda - 1 - i) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Fundamentalsystem : $e^{-2x},\ x \cdot e^{-2x},\ x^2 \cdot e^{-2x},\ e^x \cdot \sin x,\ e^x \cdot \cos x$

$\longrightarrow$ Übung : ausführliche Diskussion der “gedämpften Schwingungen”

$$y'' + 2ay' + by = 0,\ a,\ b \in \mathbb{R}$$

□

23

Maßtheorie

Ziel :

Entwicklung allgemeiner Konzepte, die es gestatten, z.B. Volumina und Oberflächen von Körpern $\subset \mathbb{R}^3$ sinnvoll zu definieren und zu berechnen; "sinnvoll" soll heißen :

für den Einheitswürfel $[0,1]^3$ *erwartet man als Volumen 1* !

Wie interpretiert man Volumenmessung?

Standpunkt :

- **Volumenmessung** ist eine **Abbildung**

  $$\mu : \{\text{Teilmengen des } \mathbb{R}^3\} \longrightarrow [0,\infty]$$

  mit gewissen Eigenschaften, z.B. :

  $$\mu(\emptyset) = 0, \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

  für **disjunkte** Mengen ("**abzählbare Additivität**")

- Flächenmessung ist eine **Abbildung**

  $$\lambda : \{2\,\mathrm{dim}\ \text{ Mfkten } \subset \mathbb{R}^3\} \longrightarrow [0,\infty]$$

  mit o.g. Eigenschaften, wobei man μ und λ noch **normiert**, d.h. z.B. $\mu([0,1]^3) = 1$. Wir werden später sehen, dass durch diese Bedingung an μ tatsächlich eine geometrische Volumenmessung in $\mathbb{R}^3$ festgelegt wird.

Zunächst wollen wir den allgemeinen Standpunkt ausbauen, d.h. Maße auf beliebigen Grundmengen X studieren.

Vorbemerkung (technischer Art) : (Reihen mit Gliedern $\in [0,\infty]$)

- Seien $a_k \in [0,\infty]$ für $k \in \mathbb{N}_\circ$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \sup\left\{\sum_{k=0}^{L} a_k : L \in \mathbb{N}_\circ\right\}$$

  wohldefiniert in $[0,\infty]$, und der Wert hängt **nicht** von der Anordnung ab. (Wert ggf. $+\infty$)

- Sei I eine **beliebige abzählbare** Indexmenge und $a_i \in [0,\infty]$ für $i \in I$. Dann setzt man

$$\sum_{i\in I} a_i := \sup\left\{\sum_{j\in J} a_j : J \subset I,\ \#J < \infty\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)} \quad \in [0,\infty]$$

  für eine **beliebige** Bijektion $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow I$.

- Die Summe über die leere (Index-)Menge ist $=: 0$.

Definition 23.1 : *(äußere) Maße*

Sei X eine beliebige Menge.
Eine Funktion $\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ heißt **ein Maß auf X**, *falls gilt :*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Für **jede** *Teilmenge A von X und alle* **abzählbaren** *Familien $(B_i)_{i\in I}$ von Mengen $B_i \subset X$ gilt :*

$$\boxed{A \subset \bigcup_{i\in I} B_i \Longrightarrow \mu(A) \le \sum_{i\in I}\mu(B_i)}$$ **(abzählbare Subadditivität)**
"σ- Subadditivität"

Bemerkungen :

1) $\mu(A) = 0$: A heißt μ-**Nullmenge**
(abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wieder Nullmengen)

2) Aus (ii) folgt die **Monotonie** :

$$A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \le \mu(B)$$

(benutze (ii) mit $B_1 := B$, $B_k := \emptyset$, $k \ge 2$)

3) In (ii) bedeutet "abzählbar" : $\# I < \infty$ oder $I \cong \mathbb{N}$.

4) In der Literatur nennt man eine **Mengenfunktion** μ mit (i), (ii) ein **äußeres Maß**. Daraus konstruiert man ein Maß durch Einschränkung von μ auf ein gewisses Teilsystem $\mathfrak{M}$ von $\mathcal{P}(X)$. Auf $\mathfrak{M}$ ist μ dann **abzählbar additiv** :

$$B_n \in m \text{ für } n \in \mathbb{N},\, B_n \cap B_m = \emptyset \text{ für } n \neq m \quad \Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

Dazu später mehr.

Beispiele :

Sei X eine beliebige Menge

i) triviales Maß: $\mu \equiv 0$

ii) **Dirac-Maß** in $a \in X$:

$$\delta_y(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

Dann : $\quad \delta_a(\emptyset) = 0 \quad \surd$

Seien $A,\, B_i \subset X,\, A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$

Fall 1 : $a \notin A$

$$\delta_a(A) = 0 \le \sum_{i=1}^{\infty} \delta_a(B_i)$$

Fall 2 : $a \in A$

$$\Longrightarrow a \in B_{i_\circ} \text{ für ein } i_\circ;\ \text{also} : 1 = \delta_a(A) = \delta_a(B_{i_\circ}) \le \sum_{i=1}^{\infty} \delta_a(B_i)$$

iii) **Zählmaß:** $\delta(A) := \# A$ (**Anzahl der Elemente von** A)
(also $= +\infty$, wenn A keine endliche Teilmenge von X ist). Dass es sich um ein Maß handelt, ergibt sich aus folgender

Übung : Sei $\varphi : X \to [0, \infty]$ beliebig und für $A \subset X$

$$\varphi_\rho(A) := \sup \left\{ \sum_{x \in E} \varphi(x) : E \subset A, \# E < \infty \right\}.$$

Für $\rho \equiv 1$ ist φ_ρ das Zählmaß. Man zeige :

Sei $(B_i)_{i \in I}$ eine abzählbare Familie von disjunkten Teilmengen von X. Dann gilt :

$$\varphi_\rho\Big(\bigcup_{i \in I} B_i\Big) = \sum_{i \in I} \varphi_\rho(B_i),$$

d.h. φ_ρ ist sogar abzählbar additiv und damit ein Maß(?!).

Als Spezialfall folgt, dass das Zählmaß φ ein Maß ist.

Das nächste Beispiel wird uns etwas länger aufhalten.

Das eindimensionale Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^1$ auf $\mathbb{R}$

Ziel :

definiere ein Maß auf $\mathbb{R}$*, so dass Intervalle* $[a,b],(a,b),[a,b),(a,b]$
das gleiche "Maß $b-a$*" haben*

Idee :

überdecke dazu $A\subset\mathbb{R}$ *möglichst gut mit Intervallen*

Definition 23.2 :

Für $A\subset\mathbb{R}$ *ist das Lebesgue - Maß von* A *die Größe*

$$\boxed{\mathcal{L}^1(A):=\inf\Big\{\sum_{j\in I}\Big(b_j-a_j\Big)\Big|\quad\Big([a_j,b_j]\Big)_{j\in I}\ \textit{ist}\ \textbf{abzählbare}\ \textit{Überdeckung von}\ A\Big\}.}$$

Satz 23.1 :

(i) $\mathcal{L}^1$ *ist ein* **Maß auf** $\mathbb{R}$.

(ii) $\mathcal{L}^1(J)=b-a$ *für* **beliebige** *Intervalle* J *mit Endpunkten* $a\le b$ *in* $[-\infty,\infty]$.

(iii) $\mathcal{L}^1(A)>0$ *für* **offene** $A\subset\mathbb{R}$, $\mathbf{A}\neq\emptyset$.

(iv) $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q})=0$.

Beweis :

(i) $\emptyset\subset[-\varepsilon,\varepsilon]\quad\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow}\quad\mathcal{L}^1(\emptyset)\le 2\cdot\varepsilon\quad\overset{\varepsilon\searrow 0}{\Longrightarrow}\mathcal{L}^1(\emptyset)=0.$

Seien $\varepsilon>0$, $A\subset\mathbb{R}$ gegeben, und es gelte $A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$ mit Mengen $B_n\subset\mathbb{R}$. Zu jedem $n\in\mathbb{N}$ wählen wir gemäß Definition ($\mathcal{L}^1(B_n)=\inf\ldots$) eine **abzählbare** Überdeckung $\Big(\Big[a_i^n,b_i^n\Big]\Big)_{i\in I_n}$ (I_n = abzählbare Indexmenge) von B_n mit

$$\mathcal{L}^1(B_n)+2^{-n}\varepsilon\ge\sum_{i\in I_n}\Big(b_i^n-a_i^n\Big).$$

Aus $B_n\subset\bigcup\limits_{i\in I_n}\Big[a_i^n,b_i^n\Big]$ folgt

$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{i\in I_n}\Big[a_i^n,b_i^n\Big]\Big),$$

also nach Def. ($\mathcal{L}^1(A) =$ inf Summe der Intervall-Längen)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^1(A) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i \in I_n} b_i^n - a_i^n \right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(B_n) + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \right\} \varepsilon \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(B_n) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt :

$$\mathcal{L}^1(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}^1(B_n). \qquad \Longrightarrow \mathcal{L}^1 \text{ ist Maß.}$$

<u>Beachte</u> :

offene Teilmengen $\neq \emptyset$ von $\mathbb{R}$ umfassen ein Intervall positiver Länge, also folgt (iii) aus

(ii) Sei $J = [a, b]$ mit $a \leq b \in \mathbb{R}$. Aus der Def. folgt :

$$\mathcal{L}^1(J) \leq b - a.$$

Z.z. ist :

$$(*) \quad b - a \leq \sum_{i \in I} (b_i - a_i) \quad \text{für } \textbf{jede} \text{ höchstens abzählbare Überdeckung } ([a_i, b_i])_{i \in I} \text{ von } J.$$

Dann folgt durch Bildung vom Infimum :

$$b - a \leq \mathcal{L}^1(J).$$

<u>Fall 1</u> : $\# I < \infty \Longrightarrow (*)$ gilt (vgl. Bild!)

a_2 b_2

a b

a_1 b_1

<u>Fall 2</u> : $\# I = \infty$, also z.B. : $I = \mathbb{N}$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Vergrößere $[a_i, b_i]$ zu $[a_i - \varepsilon_i, b_i + \varepsilon_i]$ mit $\varepsilon_i := 2^{-i}\varepsilon$.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow & & J \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i - \varepsilon_i, a_i + \varepsilon_i) \\
&\overset{J \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} & \exists N : \; & J \subset \bigcup_{i=1}^{N} (a_i - \varepsilon_i, b_i + \varepsilon_i) \\
&\Longrightarrow & & J \subset \bigcup_{i=1}^{N} [a_i - \varepsilon_i, b_i + \varepsilon_i]
\end{aligned}$$

<u>Fall 1</u> angewendet auf diese letzte Inklusion ergibt gemäß $(*)$ (endl. Indexmenge)

$$b - a \leq \sum_{i=1}^{N}(b_i - a_i) + 2\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i \leq \sum_{i\in I}(b_i - a_i) + 2\varepsilon,$$

also gilt $(*)$ auch für die Indexmenge I, da ε beliebig.

<u>Ergebnis</u> :

$$\mathcal{L}^1\left([a,b]\right) = b - a \quad \forall\, a \leq b,\ a,\ b \in \mathbb{R}.$$

Die Monotonie von $\mathcal{L}^1$ ergibt :

$$\mathcal{L}^1\left([a+\varepsilon, b-\varepsilon]\right) \leq \mathcal{L}^1\left((a,b)\right) \leq \mathcal{L}^1\left([a-\varepsilon, b+\varepsilon]\right)$$

$$\Longrightarrow \left|\mathcal{L}^1\left((a,b)\right) - (b-a)\right| \leq 2\varepsilon,$$

so dass auch

$$\mathcal{L}^1\left((a,b)\right) = b - a.$$

Für halboffene Intervalle schließt man analog, für unbeschränkte Intervalle J folgt aus der Definition bzw. Monotonie direkt

$$\mathcal{L}^1(J) = +\infty.$$

□

Später :

entsprechende Konstruktion eines Maßes $\mathcal{L}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ für alle $n \geq 1$
$\rightarrow$ *$\mathcal{L}^3$ ist die richtige Volumenmessung in $\mathbb{R}^3$.*

Definition 23.3 :

X sei beliebiger Grundraum, μ ein Maß auf X.

a) Für $A \subset X$ definiert man die **Einschränkung von μ auf A** *durch*

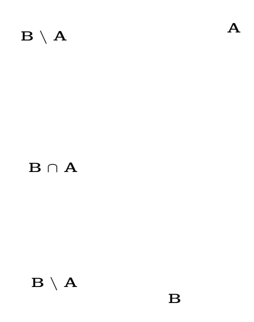
$$(\mu \lfloor A)(B) := \mu(A \cap B),\ \ B \subset X.$$

Hierbei gilt : $\mu \lfloor A$ ist ein Maß auf X!

b) $A \subset X$ heißt **μ-messbar***, wenn A jede "Testmenge" additiv zerlegt :*

$$\boxed{\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A) \quad \forall\ B \subset X}$$

Dieser Begriff wird eingeführt, um abzählbare Additivität auf disjunkten Mengen zu haben.



Bemerkungen :

1) Subadditivität $\Longrightarrow$ $\mu(B) \overset{B=(B\cap A)\cup(B-A)}{\leq} \mu(B\cap A) + \mu(B-A)$ gilt immer!
   Deshalb muß man nur "$\geq$" prüfen.
2) offenbar : $\emptyset$, X μ-messbar; μ-**Nullmengen sind** μ**-messbar**!
3) $C \subset X$ **beliebig**; A μ-messbar $\Longrightarrow A$ $(\mu \lfloor C)$-messbar
4) A μ-messbar $\overset{\text{"Komplementregel"}}{\Longleftrightarrow}$ $X - A$ μ-messbar.

Satz 23.2 : *(Eigenschaften messbarer Mengen / Operationen mit messbaren Mengen)*

*Sei μ ein Maß auf $X, \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge μ-**messbarer** Mengen. Dann :*

(i) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k,\ \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ *μ-messbar*

(ii) $A_k \cap A_\ell = \emptyset,\ k \neq \ell \implies \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$

"σ-Additivität auf messbaren Mengen"

(iii) Gilt $A_k \subset A_{k+1}$ für alle k, so ist

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \in [0,\infty].$$

(iv) Sei $\mu(A_1) < \infty$ (oder $\mu(A_L) < \infty$ für ein L) und $A_k \supset A_{k+1}$ für alle k (oder für $k \geq L$). Dann folgt

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Beweis : (in 6 Schritten)

1.) Wir erinnern an die Messbarkeitsdefinition für $A \subset X$

$$(*) \quad \mu(B) \geq \mu(A \cap B) + \mu(B - A) \quad \forall\, B \subset X$$

Also gilt für $B \subset X$

$$\mu(B) = \mu(B \cap A_1) + \mu(B - A_1)$$

und (Messbarkeit von A_2, $B - A_1$ als Testmenge in $(*)$)

$$\begin{aligned} \mu(B - A_1) &= \mu\left((B - A_1) \cap A_2\right) + \mu\left((B - A_1) - A_2\right) \\ \Longrightarrow \qquad \mu(B) &= \mu(B \cap A_1) + \mu\left((B - A_1) \cap A_2\right) + \mu\left((B - A_1) - A_2\right) \quad (**) \end{aligned}$$

Es gilt :

$$(B \cap A_1) \cup \Big\{(B - A_1) \cap A_2\Big\} \supset B \cap (A_1 \cup A_2) \text{ und } (B - A_1) - A_2 = B - (A_1 \cup A_2)$$

$$\overset{\text{Monotonie}}{\Longrightarrow} \quad \mu(B \cap A_1) + \mu\left((B - A_1) \cap A_2\right) \geq \mu\left(B \cap (A_a \cup A_2)\right)$$

$$\overset{\text{Einsetzen in } (**)}{\Longrightarrow} \quad \mu(B) \geq \mu\left(B \cap (A_1 \cup A_2)\right) + \mu\left(B - (A_1 \cup A_2)\right),$$

d.h. $\underline{A_1 \cup A_2 \text{ messbar}}$.

Induktion über n liefert :

$$\boxed{\bigcup_{k=1}^{n} A_k \text{ messbar für alle } n},$$

d.h. endliche Vereinigungen messbarer Mengen sind messbar.

2.) $X - (A_1 \cap A_2) = (X - A_1) \cup (X - A_2)$ messbar nach 1.)
$\nwarrow$ messbar $\nearrow$

$\Longrightarrow A_1 \cap A_2$ messbar. (“Komplementregel”)

Induktion über n liefert :

$$\boxed{\bigcap_{k=1}^{n} A_k \text{ messbar für alle } n},$$

d.h. Schnitte von endlich vielen messbaren Mengen ist messbar.

3.) Gelte $A_\ell \cap A_k = \emptyset$ für $k \neq \ell$; setze $B_k := \bigcup\limits_{\ell=1}^{k} A_\ell$ messbar; A_{k+1} messbar

$$\overset{B_{k+1}\,\text{Testmenge}}{\Longrightarrow} \quad \begin{aligned} \mu(B_{k+1}) &= \mu(B_{k+1} \cap A_{k+1}) + \mu(B_{k+1} - A_{k+1}) \\ &= \mu(A_{k+1}) + \mu(B_k) \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\overset{\text{falls alle Maße} < \infty\,!}{\Longrightarrow} \quad \mu(B_{k+1}) - \mu(B_k) = \mu(A_{k+1})$$

Also :

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= \mu(B_n) \\ &\overset{\text{Teleskop-Summe}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} (\mu(B_{k+1}) - \mu(B_k)) + \mu(B_1) \\ &\overset{\text{s.o.}}{=} \mu(A_1) + \sum_{k=1}^{n-1} \mu(A_{k+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k), \end{aligned}$$

d.h. $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) \ \forall\, n}$.

Also gilt (ii) für endliche Vereinigungen disjunkter Mengen. Es folgt (Monotonie)

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \quad \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

"$\geq$" gilt trivialerweise, also folgt (ii) allgemein.

Rechnung wurde unter der Annahme $\mu(A_k) < +\infty \ \ \forall\, k$ gemacht. Andernfalls gilt (ii) direkt!

4) Sei $A_\circ := \emptyset$ und gelte $\forall\, k \in \mathbb{N}_\circ$:

$A_k \subset A_{k+1} \Longrightarrow A_{k+1} - A_k = A_{k+1} \cap (X - A_k)$ messbar, dann folgt nach (ii) :

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k - A_{k-1})\right) \overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k - A_{k-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k - A_{k-1}) \overset{\text{(ii)}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\overbrace{\bigcup_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1})}^{=A_n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n), \end{aligned}$$

wobei wir (ii) für die disjunkten Mengen $B_k := A_k - A_{k-1}$ benutzt haben.

Damit ist (iii) bewiesen.

5.) Sei nun $A_k \supset A_{k+1}$ und $\mu(A_1) < \infty$.

Screibe

$$A_1 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \quad \cup \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(A_1 - A_k)}_{\text{aufsteigend messbar}}$$

$$\left.\begin{aligned} \overset{\text{(iii) + Subadd.}}{\Longrightarrow} \quad \mu(A_1) \quad &\leq \quad \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_1 - A_k)\right) \\ &= \quad \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 - A_n). \end{aligned}\right\} (+)$$

A_n messbar $\overset{A_1 \text{Testmenge}}{\Longrightarrow}$ $\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_n) + \mu(A_1 - A_n)$

und wegen $\mu(A_1) < \infty$:

$$\mu(A_1 - A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_1 \cap A_n).$$

Also :

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 - A_n) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu\,\underbrace{(A_a \cap A_n)}_{=A_n}$$

Einsetzen in (+) :

$$\mu(A_1) \leq \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$

die umgekehrte Beziehung gilt wegen Monotonie. Es folgt (iv).

6.) Zu beweisen bleibt noch (i), also Messbarkeit von $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

Sei $B \subset X$ beliebig, o.E. $\mu(B) < \infty$, da sonst

$\mu(B) \geq \mu\Big(B \cap \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big)\Big) + \mu\Big(B - \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big)$ trivial ist.

Definiere $B_j := \bigcup_{k=1}^{j} A_k$.

Beachte : μ-messbare Mengen sind $\mu\lfloor B$-messbar, d.h. (iii), (iv) gelten für $\mu\lfloor B$. D.h. :

$$\begin{aligned} & \mu\Big(B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) + \mu\Big(B - \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \\ \overset{B_j \text{ messbar nach 1.)}}{=} \quad & \Big(\mu\lfloor B\Big)\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\Big) + (\mu \lfloor B)\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{\Big(X - B_k\Big)}_{\text{absteigend}}\Big) \\ \overset{\text{(iii), (iv) } B_j \text{ aufsteigend !}}{=} \quad & \lim_{k\to\infty} \Big(\mu\lfloor B\Big)(B_k) + \lim_{k\to\infty} \Big(\mu\lfloor B\Big)(X - B_k) \\ \overset{B_k \text{messbar bzgl. } \mu\lfloor B}{=} \quad & \Big(\mu\lfloor B\Big)(X) = \mu(B) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ ist } \mu \text{ - messbar.}$$

Gemäß $\quad X - \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X - A_k)$ folgt die 2^{te} Behauptung aus (i).

□

Bemerkungen :

1) Für konkrete Maße auf dem $\mathbb{R}^n$ werden wir später ein sehr handliches Kriterium formulieren, mit dessen Hilfe sich "**Messbarkeit einer Menge bzgl. diser Maße**" schnell entscheiden läßt.

   Merke :

   Für vernünftige Maße (Volumenmessung in $\mathbb{R}^n$) sind fast alle Mengen messbar, nicht-messbare Mengen lassen sich dort nur mit dem Auswahlaxiom konstruieren.

2) Sei X eine Menge, $\vartheta \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine **σ-Algebra**, falls :

   (i) $\emptyset, X \in \vartheta$

   (ii) $A \in \vartheta \Longrightarrow X - A \in \vartheta$

   (iii) $A_n \in \vartheta$ für $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \vartheta$

   (es folgt : $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \vartheta$ für $A_n \in \vartheta$).

   Ist μ ein Maß auf X, so folgt aus 23.3 :

$$\boxed{\mathcal{M} := \Big\{ A \in \mathcal{P}(X) : A \ \text{ ist } \mu\text{-messbar } \Big\} \ \text{ ist } \sigma\text{-Algebra der } \mu\text{-messbaren Mengen.}}$$

Literatur : (Bauer)

In machen Büchern findet man folgenden **Zugang zur Maßtheorie** :

$(X, \mathcal{N}, \lambda)$ heißt **Maßraum**, falls $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$ eine **σ-Algebra** ist und $\lambda : \mathcal{N} \longrightarrow [0, \infty]$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

(i) $\lambda(\emptyset) = 0$,

(ii) $\lambda\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$ für $A_n, A_m \in \mathcal{N}$ **paarweise disjunkt**

$\Big(X, \mathcal{M}, \mu\Big|_{\mathcal{M}} \Big)$ ist daher ein Maßraum.

Ist umgekehrt $\Big(X, \mathcal{N}, \lambda\Big)$ ein beliebiger Maßraum, so setzt man für $A \subset X$

$$\mu(A) := \inf \Big\{ \lambda(B) : A \subset B, \ B \in \mathcal{N} \Big\}.$$

μ ist dann ein Maß im Sinne von 23.1.

(Ich finde den Zugang über äußere Maße begrifflich einfacher).

Bis jetzt : alles sehr allgemein, nun betrachten wir

Definition 23.4 : Maße auf metrischen Räumen

Sei X ein **metrischer** *Raum.*

(a) Die σ-Algebra $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ ist die **kleinste** *σ-Algebra in X, die alle* **offenen** *Mengen enthält. Die Elemente von $\mathcal{B}$ heißen :* **Borel-Mengen** *(Konstruktion von $\mathcal{B}$ s.u)*

(b) Ein Maß μ auf X heißt **Borel-Maß***, falls* **alle** *Borel-Mengen μ-messbar sind.*

(c) Ein Borel-Maß auf X heißt **(Borel-)regulär***, falls es zu jeder Menge $A \subset X$ eine* **maßgleiche** *Borel-Obermenge B gibt : $\mu(A) = \mu(B)$ mit $A \subset B, B \in \mathcal{B}$.*

(d) Ein Borel-reguläres Maß heißt **Radon-Maß***, wenn* **kompakte** *Mengen $\subset X$* **endliches** *Maß haben.*

(e) Eine Menge $A \subset X$ heißt **$\boldsymbol{\sigma}$-endlich bzgl. eines Maßes $\boldsymbol{\lambda}$ auf** *X, wenn man schreiben kann $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ mit* **$\boldsymbol{\lambda}$-messbaren** *Mengen $B_k, \lambda(B_k) < \infty$.*

Bemerkungen :

(0) Die Volumenmessung im $\mathbb{R}^3$ ist z.B. ein Radon-Maß.

(1) **Borel-Mengen** $\hat{=}$ alle Mengen, die sich aus offenen und abgeschlossenen Mengen durch abzählbare Vereinigungen, Schnitte und Differenzen sowie Iteration dieser Konstruktionen erzeugen lassen.

Existenz von $\mathcal{B}$: setze $\mathcal{B} := \bigcap \vartheta, \vartheta = \sigma$-Algebra $\supset \{$ offene Mengen in $X\}$ ($\mathcal{P}(\mathcal{X})$ ist ein solches ϑ!)

(2) Borel (-regulär) Maße und Radon-Maße bringen Messbarkeit und Topologie in Verbindung : *offene/abgeschlossene Mengen sind messbar, für Radon Maße haben kompakte Mengen endliche Masse*

(3) Borel- und Radon-Maße kann man auch auf beliebigen topologischen Räumen definieren.

(4) Für (e) kann X irgendeine Menge sein, also nicht notwendig ein metrischer Raum.

(5) **Beschreibung der Borel-Regularität :**

Es gilt für ein Borel-Maß λ auf X :

$$\lambda \text{ Borel-regulär } \iff \lambda(A) = \inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{B}, \mathcal{B} \supset \mathcal{A}\} \text{ für alle } \mathcal{A} \subset \mathcal{X}.$$

Beweis :

"$\Longrightarrow$" : klar!

"$\Longleftarrow$" : Sei $A \subset X$ gegeben.

Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle $B_n \in \mathcal{B}, B_n \supset A, \lambda(B_n) - \frac{1}{n} \leq \lambda(A)$.

Sei $B := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$.

Dann : $\lambda(B) \leq (B_n) \leq \lambda(A) - \frac{1}{n}$, also $\lambda(B) \leq \lambda(A)$.

"$\geq$" folgt aus $A \subset B$.

6) **Sprechweise :** Sei X **irgendeine** Menge, λ ein Maß auf X.

λ heißt **reguläres Maß** :	$\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$	$\lambda(A) = \inf\{\lambda(B) : B \supset A,\ \boldsymbol{B\ \lambda}\textbf{-messbar}\}$ für alle $A \subset X$
	$\overset{\text{vgl. (5), gl. Rechnung !}}{\Longleftrightarrow}$	für alle $A \subset X$ gibt es eine λ-messbare Menge $C \supset A$ mit $\lambda(A) = \lambda(C)$

Indem man A_n ersetzt durch maßgleiche λ-messbare Obermengen kann man zeigen bzw. die Aussage von 23.3 wie folgt verallgemeinern :

$$\{\lambda \text{ reguläres Maß}, A_n \subset A_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \Longrightarrow \lambda(A_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

Die A_n müssen also **nicht** λ-messbar sein.

Satz 23.3 :

Sei λ ein **Borel-reguläres** *Maß auf X und $A \subset X$ sei* **λ-messbar**. *Dann gilt :*

(i) A *Borel-Menge* $\Longrightarrow$ $\lambda\lfloor A$ **Borel-regulär**

(ii) $\underbrace{\lambda(A) < \infty}_{\textit{nicht notwendig Borel}}$ $\Longrightarrow$ $\lambda\lfloor A$ **Radon-Maß**, *also speziell auch Borel-regulär.*

Beweis :

Definiere $\nu := \lambda\lfloor A$.

Bemerkung 3) nach Definition 23.3 besagt :

> λ-messbare Mengen sind auch ν-messbar, also sind insbesondere alle Borel-Mengen ν-messbar und somit ist ν ein Borel-Maß.

Im Fall $\lambda(A) < \infty$ gilt :

> $\nu(K) = \lambda(A \cap K) \leq \lambda(A) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subset X$.

<u>zu (i)</u> :

Sei A jetzt Borel-Menge.

zu zeigen : ν ist Borel-regulär $(*)$

d.h. : Zu $C \subset X$ finde Borel-Menge $D \supset C$ mit $\nu(C) = \nu(D)$.

bekannt :

λ Borel-regulär $\Longrightarrow \exists$ Borel-Menge $E \subset X$ mit $\lambda(E) = \lambda(A \cap C)$ und $A \cap C \subset E$.

Setze $D := E \cup (X - A)$

$\Longrightarrow D$ Borel-Menge und $C \subset (A \cap C) \cup (X - A) \subset E \cup (X - A) = D$

sowie $\quad \nu(D) = \lambda(D \cap A) \overset{\substack{D \cap A \subset E \\ \text{nach Def. v. } D}}{\leq} \lambda(E) = \lambda(A \cap C) = \nu(C)$

Die umgekehrte Richtung $\nu(D) \geq \nu(C)$ folgt aus $C \subset D$, also gilt $(*)$.

zu (ii) :

Sei $A \subset X$ nicht notwendig Borel-Menge, aber es gelte $\lambda(A) < \infty$.

Zu zeigen ist wieder $(*)$.

Zunächst existiert zu A eine maßgleiche Borel-Obermenge B (λ Borel-reguläres Maß).

Da A λ-messbar ist, folgt :

$$\lambda(B - A) = \lambda(B) - \lambda(A) = 0 \quad (\text{beachte} : B = A \,\dot{\cup}\, (B - A) \text{ sowie } \lambda(B) < \infty \,!)$$

Für $C \subset X$ beliebig ist deshalb

$$\begin{aligned}
\nu(C) = \lambda(A \cap C) \leq \lambda(B \cap C) \quad &= \quad (\lambda\lfloor B)(C) \\
&\overset{\substack{A\ \lambda\text{-messbar,} \\ B \cap C \text{ als Testmenge}}}{=} \lambda\left((B \cap C) \cap A\right) + \lambda\left((B \cap C) - A\right) \\
&\leq \quad \lambda\left((B \cap C) \cap A\right) + \underbrace{\lambda(B - A)}_{=0} \\
&= \quad \lambda\left((B \cap C) \cap A\right) \\
&\leq \quad \nu(C)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \nu(C) = (\lambda\lfloor B)(C) \quad \forall\, C \subset X \quad \Longleftrightarrow \quad \nu = \lambda\lfloor B$

Nach (i) ist $\lambda\lfloor B$ Borel-regulär, also folgt $(*)$ für ν.

$\nu(K) < \infty$ für sogar alle $K \subset X$ ist klar.

$\square$

Satz 23.4 : Approximationssatz für Borel- und Radon-Maße

a) Sei X ein metrischer Raum und λ ein **Borel-Maß**. *Ist B* **Borel-Menge mit $\boldsymbol{\lambda(B) < \infty}$**, *so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine* **abgeschlossene Menge** *$C \subset X$ mit*

$$C \subset B \text{ und } \lambda(B - C) < \varepsilon.$$

b) Sei λ ein **Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$**. *Ist* ***B*** **Borel-Menge**, *so findet man zu jedem $\varepsilon > 0$ eine* **offene** *Menge U mit*

$$B \subset U \text{ und } \lambda(U - B) < \varepsilon.$$

Für Radon-Maße auf $\mathbb{R}^n$ gilt noch mehr

Zusatz : (Radon-Maße auf $\mathbb{R}^n$)

Sei λ ein **Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$**. Dann gilt

(i) für **jede** Menge $A \subset \mathbb{R}^n : \lambda(A) = \inf\{\lambda(U) : U \supset A$ **offen**$\}$

(ii) für jede **λ-messbare** Menge $A : \lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \subset A$ **kompakt**$\}$

Beweisskizze von 23.4 :

a) $\nu := \lambda\lfloor B$ ist **endliches Borel-Maß**

(Bemerkung nach Def. 23.3 $\Rightarrow$ λ-messbare Mengen sind auch $\lambda\lfloor B$-messbar; also sind alle Borel-Mengen $\lambda\lfloor B$ messbar; Endlichkeit : klar!)

1.) Setze $\mathcal{F} := \{A \subset X :$ A ist λ-messbar und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine **abgeschlossene** Menge C_ε mit $C_\varepsilon \subset A$ und $\nu(A - C_\varepsilon) < \varepsilon$ $\}$

dann zeige :

- $\mathcal{F} \supset \{$ abgeschlossene Teilmenge von $X\}$ klar!
- $\mathcal{F}$ ist stabil gegen abzählbare $\bigcup$ und $\bigcap$
- $\mathcal{F} \supset \{$ offene Teilmengen von $X\}$
  (beachte dazu : U offen $\Longrightarrow U = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\{x \in U : \operatorname{dist}(x, X - U) \geq 1/i\}$ und $\{\ldots \geq \frac{1}{i}\}$ ist abgeschlossen)

2.) Sei $\mathcal{F}^* := \{A \in \mathcal{F} : X - A \in \mathcal{F}\}$.

Zeige : $\mathcal{F}^*$ ist stabil bzgl. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}$ und $\mathcal{F}^* \supset \{$ offene Mengen $\}$

Insgesamt :

$\mathcal{F}^*$ ist σ-Algebra $\supset \{$ offene Mengen in $X\} \Longrightarrow \boxed{\mathcal{F}^* \supset \mathcal{B}}$.

Unsere Borel-Menge B aus Teil a) gehört also zu $\mathcal{F}^*$, was zu beweisen war.

Bemerkung :

Die Bildung von $\mathcal{F}^*$ ist nötig, da $\mathcal{F}$ nicht abgeschlossen bzgl. Bildung von Komplementen.

b) Jetzt : $X = \mathbb{R}^n$ und B Borel-Menge sowie λ Radon-Maß.

Sei $U_m := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < m\}$

$\Longrightarrow U_m - B$ ist Borel-Menge mit $\lambda(U_m - B) \leq \lambda(\overline{U}_m) < \infty$.

Hier geht ein, dass $X = \mathbb{R}^n$ ist. Andernfalls ist $\overline{U}_m$ nicht notwendig kompakt!
(und hat somit endliches Maß).

Nach a) gibt es eine **abgeschlossene** Menge C_m mit

$$C_m \subset U_m - B, \lambda((U_m - B) - C_m) = \lambda(U_m - C_m) - B) < \varepsilon 2^{-m}$$

wobei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben ist.

Die Mengen $U_m - C_m$ sind **offen**, also ist auch $U := \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(U_m - C_m)$ offen.

Es gilt (Wahl von C_m, d.h. $C_m \subset \mathbb{R}^n - B$) :

$$\begin{aligned} B \subset \mathbb{R}^n - C_m \quad & \Longrightarrow \quad U_m \cap B \subset U_m - C_m \\ & \overset{\text{Def.von } U_m}{\Longrightarrow} \quad B = \bigcup_{m=1}^{\infty} (U_m \cap B) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} (U_m - C_m) = U, \end{aligned}$$

d.h. U **offene Obermenge von B**. Für das Maß von $B - U$ bekommt man

$$\begin{aligned} \mu(U - B) &= \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (U_m - C_m) - B\right) \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left((U_m - C_m) - B\right) \quad \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \mu(B) = \inf\{\mu(V) : V \text{ offen } \subset B\}$

□

In der Praxis hat man es meistens mit Borel-Maßen oder sogar Radon-Maßen auf metrischen Räumen zu tun, und es stellt sich deshalb die Frage :
Wie entscheidet man schnell, ob ein gegebenes Maß diese Eigenschaft hat ?

Satz 23.5 : Kriterium von Carathéodory

Sei λ ein Maß auf dem metrischen Raum X. Gilt

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) \quad \forall A, B \subset X, \operatorname{dist}(A, B) > 0$$

so ist λ ein **Borel-Maß auf X**.

Beweis :

Es genügt zu zeigen, dass **alle abgeschlossenen Mengen** $C \in X$ messbar sind bzgl. λ, denn die messbaren Mengen bilden eine σ-Algebra, und jede σ-Algebra $\supset$ $\{$abgeschlossene Mengen in $X\}$ umfaßt $\mathcal{B}$.

Für $A \subset X$ beliebig ist zu beweisen (bei fixierter abgeschlossener Menge C)

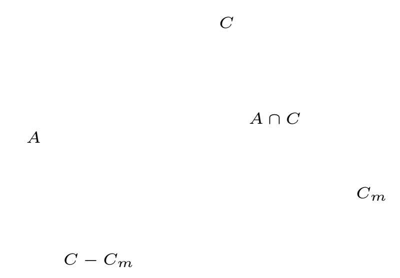
$$(*) \quad \lambda(A) \geq \lambda(A \cap C) + \lambda(A - C).$$

Dazu sei o.E. $\lambda(A) < \infty$. Für $m \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(A, B) &:= \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} \\ C_m &:= \{x \in X : \operatorname{dist}(x, C) \leq 1/m\} \\ & \qquad \text{(die } \textbf{äußere Parallelmenge} \text{ von } C \text{ im Abstand } 1/m). \end{aligned}$$

Man bekommt C_m, indem man um C einen Streifen der Breite $1/m$ legt.

Man bekommt C_m, indem man um C einen Streifen der Breite $\frac{1}{m}$ legt.



$$\Longrightarrow \quad \operatorname{dist}(A - C_m, A \cap C) \geq \frac{1}{m}$$

$$\overset{\text{Vor}}{\Longrightarrow} \quad (**) \quad \lambda(A - C_m) + \lambda(A \cap C) = \lambda((A - C_m) \cup (A \cap C)) \overset{\text{Mon.}}{\leq} \lambda(A),$$

denn $\quad (A - C_m) \cup (A \cap C) \subset A.$

Behauptung : $(\overset{*}{**}) \qquad \lim\limits_{m \to \infty} \lambda(A - C_m) = \lambda(A - C)$

Setzt man dies in $(**)$ ein, so folgt $(*)$, also die Behauptungung.

ad $(\overset{*}{**})$: Sei für $k \in \mathbb{N}$

$$R_k := \left\{ x \in A : \tfrac{1}{k+1} < \operatorname{dist}(x, C) \leq \tfrac{1}{k} \right\} \subset C_k$$

$$\Longrightarrow \quad A - C = (A - C_m) \cup \bigcup_{k=m}^{\infty} R_k$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda(A - C_m) \overset{C_m \supset C}{\leq} \lambda(A - C) \overset{\text{Vor.}}{\leq} \lambda(A - C_m) + \sum_{k=m}^{\infty} \lambda(R_k)$$

Man sieht :

$$\text{Ist } \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(R_k) < \infty \text{ so folgt } (\overset{*}{**}) \ .$$

Es gilt für $j \geq i + 2 \quad \operatorname{dist}(R_i, R_j) > 0 \quad \underset{+\text{Ind.}}{\overset{\text{Vor}}{\Longrightarrow}}$

$$\left.\begin{array}{lclcl} \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda(R_{2k}) & = & \lambda\left(\bigcup\limits_{k=1}^{m} R_{2k}\right) & \overset{\text{Mon.}}{\leq} & \lambda(A), \\ \sum\limits_{k=0}^{m} \lambda(R_{2k+1}) & = & \lambda\left(\bigcup\limits_{k=0}^{m} R_{2k+1}\right) & \overset{\text{Mon.}}{\leq} & \lambda(A) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda(R_k) \leq 2\,\lambda(A) < \infty \quad \forall\, m$$

$\square$

Das Lebesgue - Maß $\mathcal{L}^n$ auf $\mathbb{R}^n$

ist für geometrische Anwendungen wie Volumenmessung das wichtigste Maß. Die Konstruktion ist analog zu der von $\mathcal{L}^1$ nur mit Quadern statt Intervallen.

Definition 23.5 :

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$\mathcal{L}^n(A) := \inf \left\{ \sum_{i\in I} |Q_i| : \begin{array}{l} (Qi)_{i\in I} \text{ ist höchstens abzählbare Überdeckung} \\ \text{von } A \text{ durch } \textbf{abgeschlossene} \text{ Quader } Q_i \end{array} \right\}$$

das **sogenannte Lebesgue-Maß von** $\boldsymbol{A}$. *(genauer: n-dim. Lebesgue-Maß)*

$$\begin{array}{rcll} \textit{Hier :} \quad Q &=& [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n], & \\ |Q| &:=& (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n). & \text{“Elementarvolumen”} \end{array}$$

Bemerkungen :

1) $\boldsymbol{\mathcal{L}^n}$**ist ein Maß auf** $\boldsymbol{\mathbb{R}^n}$**.**
   Beweis wie für $\mathcal{L}^1$; Einzelheiten $\longrightarrow$ Übungen !

2) In der Definition kann man genauso **offene Quader** $W = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ oder **teilweise offene Quader** W benutzen, vorausgesetzt man setzt immer $|W| :=$ *Produkt der Kantenlängen.*

   Begründung :

   $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$, $Q_i =$ abgeschlossener Quader. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben;
   bilde nun mit später zu definierendem ε_i

   $$W_i := \big(a_1^i - \varepsilon_i,\, b_1^i + \varepsilon_i\big) \times \ldots \times \big(a_n^i - \varepsilon_i,\, b_n^i + \varepsilon_i\big)\,,$$

   wenn

   $$Q_i = [a_1^i, b_1^i] \times \ldots \times [a_n^i, b_n^i]$$

   dann folgt :

   $$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \text{ mit offenen Quadern } W_i$$

   und

   $$\sum_{i=1}^{\infty} |W_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \big(b_j^i - a_j^i + 2\varepsilon_i\big)\ ;$$

   gemäß

   $$\prod_{j=1}^{n} \big(b_j^i - a_j^i + 2\varepsilon_i\big) \le \prod_{j=1}^{n} \big(b_j^i - a_j^i\big) + 2 \cdot \varepsilon_i \cdot 2^{n-1} \max_{j=1\ldots n} \{1, b_j^i - a_j^i\}^{n-1}$$

folgt

$$|W_i| \leq |Q_i| + 2^{-i}\varepsilon\,,$$

wenn man von ε_i verlangt

$$2\varepsilon_i 2^{n-1} \max_{j=1\ldots n}\{1, b^i_j - a^i_j\}^{n-1} \leq 2^{-i}\varepsilon$$

Insgesamt :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |W_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| + \varepsilon\,,$$

so dass

$$\inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |W_i| : \ldots W_i \text{ offen } \ldots\} = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |Q_i| : \ldots Q_i \text{ abgeschlossen } \ldots\}\,.$$

3) Ist Q ein Quader und zerlegt man diesen durch Schnitte mit achsenparallelen Hyperebenen in Teilquader $Q_1, \ldots, Q_N$, so gilt :

$$|Q| = \sum_{i=1}^{N} |Q_i|$$

Q_4 Q_3

Q_1 Q_2

Q

$\Longrightarrow$ **bei der Definition von $\mathcal{L}^n(A)$kann man mit Quadern (sogar Würfeln !) arbeiten, deren Kantenlängen unterhalb einer beliebig kleinen vorgegebenen Schranke liegen :**

$$\boxed{\mathcal{L}^n(A) = \inf\left\{\sum_{i\in I}|Qi| : \begin{array}{l}(Qi)_{i\in I} \text{ ist Quaderüberdeckung von } A \text{ mit Quadern}\\ \text{(oder Würfeln) der } \textbf{Kantenlänge} \leq \boldsymbol{\delta}\end{array}\right\}.}$$

4) Für Quader Q (abgeschlossen, offen, halboffen) gilt stets

$$\boxed{\mathcal{L}^n(Q) = |Q|}$$

Beweis : wie für $\mathcal{L}^1$!

Satz 23.6 : (Eigenschaften von $\mathcal{L}^n$)

(i) *Für jede Menge* $A \subset \mathbb{R}^n$ *gilt* $\mathcal{L}^n(A) = \inf\{\mathcal{L}^n(U) : U \text{ offen} \supset A\}$.

(ii) $\mathcal{L}^n$ *ist ein* **Radon-Maß**.

(iii) **Translationsinvarianz :** $\mathcal{L}^n(b + A) = \mathcal{L}^n(A) \quad \forall\, b \in \mathbb{R}^n, A \subset \mathbb{R}^n$

(iv) **Homogenität vom Grad n :** $\mathcal{L}^n(r \cdot A) = r^n \mathcal{L}^n(A) \quad \forall\, r \geq 0, A \subset \mathbb{R}^n$

(v) *Seien* $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ *und* $T(x) = (r_1 x_1, \ldots, r_n x_n)$. *Dann gilt :*

$$\mathcal{L}^n(T(A)) = |r_1 \ldots r_n| \cdot \mathcal{L}^n(A). \ (\textit{beachte : } \det T = r_1 \ldots r_n)$$

Beweis :

(i) für $\mathcal{L}^n(A) = \infty$ klar !

Sei also $\mathcal{L}^n(A) < \infty$.

Nach Bemerkung 2) im Anschluß an Definition 23.5 gilt :

zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es **offene Quader** $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j =: U \quad \text{und} \quad \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon \geq \sum_{j=1}^{\infty} |P_j|.$$

U ist **offen** mit

$$\mathcal{L}^n(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |P_j| \leq \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon.$$

Da umgekehrt offenbar $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(U)$ gilt, folgt (i).

(ii) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ **kompakt**

$\Longrightarrow \exists$ Quader Q mit $K \subset Q$

$\Longrightarrow \mathcal{L}^n(K) \leq \mathcal{L}^n(Q) = |Q| < \infty$.

Mit Carathéodory's Kriterium zeigen wir, dass $\mathcal{L}^n$ *Borel-Maß ist :*

Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. O.E. $\mathcal{L}^n(A \cup B) < \infty$, sonst ist nichts zu zeigen.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben

$\Longrightarrow$ $\exists$ Quaderüberdeckung von $A \cup B$ mit Quadern Q_j
der Kantenlängen $\leq \delta$ (wird später fixiert) mit

$$\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq \mathcal{L}^n(A \cup B) + \varepsilon$$

Sei $J \subset \mathbb{N}$ definiert durch $\quad j \in J \Longleftrightarrow Q_j \cap (A \cup B) \neq \emptyset$.

Dann ist auch $(Q_j)_{j \in J}$ Überdeckung von $A \cup B$.

Sei $\delta = \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{dist}\,(A, B)$. A B

Dann ist für Q_j, $j \in J$, entweder $Q_j \cap A \neq \emptyset$ und $Q_j \cap B = \emptyset$ oder umgekehrt.
Sei $J_1 := \{j \in J : Q_j \cap A \neq \emptyset\}$, $J_2 := \{j \in J : Q_j \cap B \neq \emptyset\}$

$$\Longrightarrow \quad J = J_1 \cup J_2, \; J_1 \cap J_2 = \emptyset,$$

$(Q_j)_{j \in J_1}$ ist Überdeckung von A, $(Q_j)_{j \in J_2}$ ist Überdeckung von B

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(B) &\leq \sum_{j \in J_1} |Q_j| + \sum_{j \in J_2} |Q_j| \\ &= \sum_{j \in J} |Q_j| \\ &\leq \mathcal{L}^n(A \cup B) + \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(A \cup B),$$

und die umgekehrte Ungleichung folgt aus der Monotonie.

Nachzuweisen : **Borel-Regularität von $\mathcal{L}^n$**

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Nach (i) gibt es eine Folge U_i offener Mengen mit

$$U_k \supset A, \quad \mathcal{L}^n(A) = \lim_{k \to \infty} \mathcal{L}^n(U_k).$$

$B := \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ ist Borel-Menge (also messbar), $B \supset A$, mit

$$\mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(U_k) \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}^n(A), \text{ d.h. } \mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(A).$$

Die umgekehrte Ungleichung gilt trivial, also ist B maßgleiche Borel-Obermenge zu A.

(iii) $(Q_j)_{j \in J}$ abzählbare Quaderüberdeckung von A

$\Longrightarrow$ $(b + Q_j)_{j \in J}$ abzählbare Quaderüberdeckung von $b + A$

außerdem $|b + Q_j| = |Q_j|$, da die Kantenlängen gleich sind $\Longrightarrow \mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(b + A)$.

(iv) ist Spezialfall von

(v) Sei (Q_j) Quaderüberdeckung von $A \Longrightarrow (TQ_j)$ ist Quaderüberdeckung von TA mit

$$\sum_{j \in J} |TQ_j| = |r_1 \ldots r_n| \cdot \sum_{j \in J} |Q_j|,$$

denn ist

$$Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

so gilt

$$TQ = [\alpha_1, \beta_1] \times \ldots \times [\alpha_n, \beta_n] \text{ mit } \alpha_k \le \beta_k,\ \{\alpha_k, \beta_k\} = \{r_k a_k, r_k \cdot b_k\}.$$

Es folgt

$$\mathcal{L}^n(TA) \le |r_1 \ldots r_n| \mathcal{L}^n(A) \quad (*)$$

Ist ein $r_i = 0$, so gilt „=" direkt (vgl. nachfolgende Bem.).
Sind alle $r_i \neq 0$, so setze

$$Sx := \left(\frac{1}{r_1} x_1, \ldots, \frac{1}{r_n} x_n \right).$$

Es gilt $(*)$ für S statt T und TA statt A, d.h.

$$\mathcal{L}^n\left(S(TA)\right) \le |\frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_n}| \mathcal{L}^n(TA).$$

Gemäß $S \cdot T = Id$ folgt die Behauptung.

□

Folgerung :

$\mathbb{R}$

$$A \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_k = c\} \text{ für ein } k \in \{1, \ldots, n\},\ c \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}^n(A) = 0$$

$\mathbb{R}^{n-1}$

A

denn : nach Translation o.E. $c = 0$.

Sei $T(x) = (x_1 \ldots x_{k-1}\, 0\, x_{k+1} \ldots x_n) \quad \Longrightarrow \quad TA = A$ und $\mathcal{L}^n(TA) = 0 \cdot \mathcal{L}^n(A) = 0$.

Bemerkung :

hier zunächst $\mathcal{L}^n(A) < \infty$, da sonst Term der Form $0 \cdot \infty$ auftritt;
falls $\mathcal{L}^n(A) = \infty \quad \Longrightarrow \quad$ betrachte $A_m = A \cap \{x : |x| \le m\}$

□

Wir bemerken, dass $\mathcal{L}^n$ weitgehend durch die Aussagen von Satz 23.7 eindeutig festgelegt wird.

Satz 23.7 : Eindeutigkeit von $\mathcal{L}^n$

$\mathcal{L}^n$ ist das **einzige Maß** *λ auf $\mathbb{R}^n$ mit*

(i)	**Translationsinvarianz :**	$\lambda(b+A) = \lambda(A) \quad \forall\, b \in \mathbb{R}^n,\ A \subset \mathbb{R}^n$
(ii)	**Additivität auf Quadern :**	*Für* **disjunkte** *Quader* $\subset \mathbb{R}^n$ *gilt* $\lambda(Q_1 \cup Q_2) = \lambda(Q_1) + \lambda(Q_2)$
(iii)	**Normierung :**	$\lambda([0,1]^n) = 1$
(iv)	**Regularität :**	$\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) : A \subset U \text{ offen }\} \quad \forall\, A \subset \mathbb{R}^n$

Beweis : -

Bemerkung :

(i), (ii), (iv) legen $\mathcal{L}^n$ bis auf einen Faktor $\alpha \geq 0$ fest. Es ist $\alpha = \lambda([0,1]^n)$.

□

Unser geometrisches Maß $\mathcal{L}^n$ sollte invariant gegenüber Drehungen sein, denn Drehungen verändern ja anschaulich das Volumen nicht. Das läßss t sich sehr einfach beweisen, wenn man $\mathcal{L}^n$ mit Hilfe von **Kugelüberdeckungen** charakterisiert. Zur Vorbereitung dient ein

Topologisches Lemma :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ mit abgeschlossenen achsenparallelen Würfeln W_i, **deren Inneres paarweise disjunkt ist**.

Beweis :

Sei $m \in \mathbb{N}_\circ$ und $\mathcal{F}_m := 2^{-m}\mathbb{Z}^n = \{2^{-m}(\ell_1, \ldots, \ell_n) : \ell_i \in \mathbb{Z}\}$
$\rightsquigarrow$ induziert Zerlegung von $\mathbb{R}^n$ in abzählbar viele, abgeschossene, achsenparallele Würfel der Kantenlänge 2^{-m}.

Definiere nun folgende Mengen:

$\mathcal{W}^\circ := \{W_i^\circ : i \in I_\circ\}$ Menge der Würfel aus $\mathcal{F}_\circ$, die ganz in U liegen
$\rightsquigarrow I_\circ \simeq \mathbb{N}$ oder $\#I_\circ < \infty$;

$U_1 := U - \bigcup_{i \in I_\circ} W_i^\circ$ offen
$\mathcal{W}^1 := \{W_i^1 : i \in I_1\}$ Menge der Würfel aus $\mathcal{F}_1$, die ganz in U_1 liegen
$\rightsquigarrow I_1 \simeq \mathbb{N}$ oder $\#I_1 < \infty$;

$$\text{induktiv:} \quad \begin{aligned} U_{m+1} &:= U_m - \bigcup_{i \in I_m} W_i^m, \\ \mathcal{W}^{m+1} &:= \{W_i^{m+1} : i \in I_{m+1}\} \text{ Würfel aus } \mathcal{F}_{m+1}, \text{ die ganz in } U_{m+1} \text{ liegen} \end{aligned}$$

$\mathcal{W} := \left(W_i^j\right)_{j \in \mathbb{N}_\circ, i \in I_j}$ System von Würfeln mit paarweise disjunktem Inneren es gilt:

$$U = \bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{i \in I_j} W_i^j$$

□

Wir benutzen das topologische Lemma zum Beweis von

Maßtheoretisches Lemma :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ **offen** und **beschränkt**. Dann gibt es **abzählbar viele, paarweise disjunkte, abgeschlossene** Kugeln $B_i \subset U$ mit

$$\mathcal{L}^n(U) = \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i)$$

Bemerkung :

Es gilt im allgemeinen nicht $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ sondern nur $\mathcal{L}^n\left(U - \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = 0$, d.h. **die Kugel B_i schöpfen U nur bis auf eine $\mathcal{L}^n$-Nullmenge aus**.

Beweis :

Wir schreiben nach dem vorigen Lemma $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ mit Würfel W_i, deren Inneres paarweise disjunkt ist, $\alpha_i =$ Kantenlänge W_i, $a_i =$ Mittelpunkt von W_i.

a_i $\qquad \tilde{B}_i =$ Innenkugel zu W_i um a_i mit Radius $\frac{\alpha_i}{2}$

$\tilde{W}_i =$ achsenparallele Würfel um a_i in $\tilde{B}_i$ mit Kantenlänge $\frac{\alpha_i}{\sqrt{n}}$

W_i

$\tilde{W}_i$ $\quad \tilde{B}_i$

$$\Longrightarrow \mathcal{L}^n(\tilde{B}_i) > \mathcal{L}^n(\tilde{W}_i) = \left(\frac{\alpha_i}{\sqrt{n}}\right)^n = n^{-n/2}\mathcal{L}^n(W_i)$$

Ersetze $\tilde{B}_i$ durch eine etwas kleinere konzentrische Kugel B_i mit

$$\mathcal{L}^n(B_i) > n^{-n/2}\mathcal{L}^n(W_i).$$

Beachte : die B_i sind jetzt disjunkt!
Außerdem sei B_i abgeschlossen. Dann gilt einerseits

$$\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overset{o}{W}_i\right) \overset{\text{disj. Inneres}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\overset{o}{W}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(W_i) \geq \mathcal{L}^n(U), \text{ da } \bigcup W_i \supset U,$$

und andererseits

$$\mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overset{o}{W}_i\right) \leq \mathcal{L}^n(U) \text{ wegen der Monotonie.}$$

Also folgt

$$\infty > \mathcal{L}^n(U) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(W_i), \text{ so dass die Reihe rechts konvergiert.}$$

Sei $U_1 := U$, $U_2 := U_1 - \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$ offen, wobei m später gewählt wird.
Es gilt :

$$U_2 = \bigcup_{i=m+1}^{\infty} W_i \cup \bigcup_{i=1}^{m} (W_i - B_i)$$

$$\begin{aligned}
\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{L}^n(U_2) &= \sum_{i=m+1}^{\infty} \mathcal{L}^n(W - I) + \sum_{i=1}^{m} (\mathcal{L}^n(W_i) - \mathcal{L}^n(B_i)) \\
&= \Big[\sum_{i=m+1}^{\infty} \ln(W_i) + \sum_{i=1}^{m} n^{-N/2}\mathcal{L}^n(W_i) - \ln(B_i\Big] + \sum_{i)1}^{m} (1 - n^{-N/2})\mathcal{L}^n(W_i).
\end{aligned}$$

Es ist $n^{-n/2}\mathcal{L}^n(W_i) - \mathcal{L}^n/(B_i) < 0$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \qquad & [\ldots] + \sum_{i=1}^{m} \big(1 - n^{-n/2}\big)\mathcal{L}^n(Wi) \\
< \quad & \Big\{ \sum_{i=m+1}^{\infty} \mathcal{L}^n(W_i) + \underbrace{n^{-n/2}\mathcal{L}^n(W_1) - \ln(B_1)}_{<0} \Big\} + \sum_{i=1}^{m} \big(1 - n^{-n/2}\big)\mathcal{L}^n(W_i)
\end{aligned}$$

Da die Reihe konvergiert, gibt es ein N_1 mit $\{\ldots\} < 0 \;\forall\, m \geq N_1$.
Sei $m = N_1$ und U_2 mit diesem m definiert. Dann ist

$$\mathcal{L}^n(U_2) \;\leq\; \sum_{i=1}^{m} (1 - n^{-n/2})\, \mathcal{L}^n(W_i) \;\leq\; \big(1 - n^{-n/2}\big)\, \mathcal{L}^n(U_1).$$

Definiere rekursiv offene Mengen $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$
(wiederhole die Konstruktion mit U_2, statt U_1, usw. !)

mit $\boxed{\mathcal{L}^n(U_{k+1}) \leq \left(1 - n^{-n/2}\right) \mathcal{L}^n(U_k)}$

Es gilt in jedem Schnritt :

$$U_{k+1} = U_k - \bigcup \text{ endlich viele, abgeschlossene, disjunkte Kugeln } \subset U_k.$$

Sei $\{K_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der disjunkten, abgeschlossenen Kugeln, die in jedem Schritt entfernt werden

$$\Longrightarrow \quad U = U_k \cup \bigcup_{\ell=1}^{\infty} K_\ell \quad \forall\, k$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}^n(U) \leq \mathcal{L}^n(U_k) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(K_\ell).$$

Mit $\quad \mathcal{L}^n(U_k) \leq \left(1 - n^{-n/2}\right)^{k-1} \mathcal{L}^n(U_1) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$

folgt $\quad \mathcal{L}^n(U) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(K_\ell),$

denn „$\geq$" ist wegen $K_\ell \subset U$ und der Disjunktheit von K_ℓ trivial.

$\square$

Mit Hilfe des vorstehenden Lemmas beweisen wir jetzt

Satz 23.8 : (weitere Eigenschaften von $\mathcal{L}^n$)

(i) Für $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\mathcal{L}^n(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i) : \; B_i$ Kugeln mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\}$.

(ii) Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y|$ ist $\mathcal{L}^n(f(A)) \leq L^n \cdot \mathcal{L}^n(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$

(iii) Ist $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine **Isometrie***, also $Tx = x_\circ + Sx$ mit einer* **orthogonalen** *Abbildung S, so gilt für $A \subset \mathbb{R}^n$: $\quad \mathcal{L}^n(TA) = \mathcal{L}^n(A)$.*

(iv) Ist $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **linear** *und $A \subset \mathbb{R}^n$, so ist*

$$\mathcal{L}^n(LA) = |\det L| \cdot \mathcal{L}^n(A).$$

(v) Ist $m < n$, so sind $m - \dim$ Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-Nullmengen.
(Aus (v) folgt u.a., dass es in (i) egal ist, ob die Kugel offen oder abgeschlossen sind.)

Bemerkung :

Hier zeigt sich der Vorteil, Maße auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ zu definieren und nicht nur auf gewissen σ-Algebren $\mathfrak{M}$. Man hätte dann nämlich zu zeigen, ob in (ii) $\; f(A) \in \mathfrak{M}$ gilt für $A \in \mathfrak{M}$.

Beweis von Satz 23.8 :

(i) $\mathcal{L}^n(A) = \infty \quad \surd$

Sei zunächst A offen und beschränkt

$\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ disjunkte, abgeschlossene Kugeln $\tilde{B}_i \subset A, \in \mathbb{N}$, mit $\mathcal{L}^n(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\tilde{B}_i)$

$C := A - \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_i$ ist $\mathcal{L}^n$-Nullmenge

$\Longrightarrow$ zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine **Würfelüberdeckung** $C \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} W_j$ mit $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(W_j) < \varepsilon$.

Zu W_j bilde die **Umkugel** B_j^* mit Radius $\frac{1}{2} \operatorname{diam} W_j$.

Wegen der Homogenität von $\mathcal{L}^n$ folgt (beachte : $\mathcal{L}^n(W_j) = \big(\frac{\operatorname{diam} W_j}{\sqrt{n}}\big)^n$)

$$\mathcal{L}^n(B_j^*) = \mathcal{L}^n(B_1) \cdot \big(\frac{1}{2} \operatorname{diam} W_j\big)^n = \omega_n \frac{n^{n/2}}{2^n} \mathcal{L}^n(W_j), \text{ wobei } \omega_n := \mathcal{L}^n(B_1).$$

Damit ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_j^*) \;\leq\; \omega_n 2^{-n} n^{n/2} \varepsilon.$$

Die Kugeln $\tilde{B}_i$ bilden zusammen mit den Kugeln B_j^* eine Überdeckung von A und daher

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\tilde{B}_i) + \sum_{J=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_j^*) \leq \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon \cdot 2^{-n} n^{n/2} \cdot \omega_n.$$

Wegen der Beliebigkeit von ε folgt die Behauptung.

A beliebig : überdecke A durch offene Quader Q_i bis auf ein ε und benutze den ersten Beweisteil für Q_i.

(ii) o.E. $L > 0$ und $\mathcal{L}^n(A) < \infty$; für $B_r(x_\circ) \subset \mathbb{R}^n$ ist $f(B_r r(x_\circ)) \subset B_{Lr}(f(x_\circ))$.

Man wähle eine **Kugelüberdeckung** $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(x_i)$ mit $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_{r_i}(x_i)) \;\leq\; \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon$

$$\Longrightarrow \qquad f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{Lr_i}(f(x_i))$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(f(A)) \quad & \leq \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_{Lr_i}(f(x_i))) \\
& \overset{\text{Homog. + Translationsinv.}}{=} \quad \sum_{i=1}^{\infty} L^n \cdot \mathcal{L}^n(B_{r_i}(x_i)) \\
& \leq \quad L^n \cdot (\mathcal{L}^n(A) + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt die Behauptung.

(iii) Da wir bereits Translationsinvarianz wissen, sei T o.E. eine **orthogonale** Abbildung, also $|Tx - Ty| = |x - y|$. Aus (ii) folgt

$$\mathcal{L}^n(TA) \leq 1^n \cdot \mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(T^{-1}(TA)) \leq \mathcal{L}^n(TA),$$

da auch T^{-1} **orthogonal**.

(iv) Sei L **linear**. Dann gilt ($\rightarrow$ **Polarzerlegung** der Linearen Algebra)

$$L = O_1 D O_2$$

mit **orthogonalen** Abbildung O_1, O_2 und einer Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} r_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_n \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^n(L(A)) = \mathcal{L}^n(0_1(DO_2(A))) = \mathcal{L}^n(DO_2(A)) \\ \overset{\text{früheres Ergebnis}}{=} \; & |r_1 \dots r_n| \cdot \mathcal{L}^n(0_2(A)) = |r_1 \dots r_n| \cdot \mathcal{L}^n(A) = |\det L| \cdot \mathcal{L}^n(A). \end{aligned}$$

(v) Sei M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit $\dim = n - 1$.
Zu zeigen : $\mathcal{L}^n(M) = 0$

$\mathbb{R}$ $\quad Q' \times (-\varepsilon, \varepsilon)$

0 $\quad \mathbb{R}^{n-1}$ $\quad a$ $\quad f(0)$

V

U $\quad M$

$$\begin{aligned} U &= \text{offene Umg. von } 0 in \mathbb{R}^n, \\ V &= \text{offene Umg. von } Q := f(0) \text{ in } \mathbb{R}^n, \\ & \quad f : U \to V \text{ Diffeomorphismus mit } f(0) = a \text{ und } f(U \cap \mathbb{R}^{n-1}) = M \cap V \\ Q' &= \text{Quader in } \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \; f(Q') \subset f(Q' \times (-\varepsilon, \varepsilon)) \\ &\Longrightarrow \; \mathcal{L}^n(f(Q')) \leq \mathrm{Lip}(f)^n \cdot \mathcal{L}^n(Q' \times (-\varepsilon, \varepsilon)) \leq \mathrm{Lip}(f)^n \cdot \mathrm{const} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt

$$\mathcal{L}^n\left(f(Q')\right) = 0 \;\Longrightarrow\; \mathcal{L}^n\left(f(U \cap \mathbb{R}^{n-1})\right) = 0 \;\Longrightarrow\; \mathcal{L}^n\left(M \cap V\right) = 0.$$

$\square$

24

Meßbare Funktionen

bilden die Grundlage der Integrationstheorie.

Definition 24.1 :

> *Sei X eine* **beliebige Menge**, *Y ein* **topologischer** *Raum, λ ein Maß auf X.*
> *$f : X \to Y$ heißt* **λ-messbar**, *falls $f^{-1}(\Omega)$ λ-messbar ist für alle* **offenen** *$\Omega \subset Y$.*

Bemerkungen :

1) Sei $\vartheta := \{A \subset Y : f^{-1}(A) \text{ ist } \lambda\text{-messbar } \}$.

   Rechenregeln für Urbilder $\Longrightarrow$ $\vartheta \subset \mathcal{P}(Y)$ ist eine **σ-Algebra**, die per Definition die offenen Mengen in Y umfaßt.

   Also : $\boxed{\text{Borel-Mengen in } Y \subset \vartheta}$

2) λ Borel-Maß auf X (**metr. Raum**), $f : X \to Y$ **stetig**

   $\Longrightarrow$ f ist λ-messbar, denn f-Urbilder offener Mengen in Y sind offen in X.

   (Analyse der Stetigkeitseigenschaften messbarer $f \Longrightarrow$ vgl. Satz 24.3)

3) Sei $M \subset X$. Dann gilt: ($\to$ Übung !)

   $$\boxed{\chi_M : X \to \mathbb{R} \ \ \lambda\text{-messbar} \quad \Longleftrightarrow \quad M \ \ \lambda\text{-messbar}}$$

   $$\chi_M(x) := \begin{cases} 0, & x \notin M \\ 1, & x \in M \end{cases}$$

4) **Kriterium für reellwertige Abbildungen :**

   Sei λ ein Maß auf einer beliebigen Menge X und $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt :

   $$f \ \ \lambda\text{-messbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} f^{-1}((-\infty, t]) \ \text{ oder } \ f^{-1}([s,t]),\ s,\, t \in Q \\ \lambda\text{-messbar } \ \textbf{für alle } t \in \mathbb{Q}, \end{array} \right. \quad \left(\begin{array}{c} \text{analog mit} \\ \text{offenen Intervallen} \end{array} \right)$$

denn aus dem System $(-\infty, t]$, $t \in \mathbb{Q}$, kann man alle offenen Mengen $\subset \mathbb{R}$ durch abzählbare Schritte, Vereinigungen und Differenzen erzeugen. Entsprechendes gilt für das System $[s, +\infty)$, $s \in \mathbb{Q}$.

5) Es ist zweckmäßig, auch Funktionen

$$f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

zu betrachten, d.h. $f(x) \in \{\pm\infty\}$ ist möglich.

Dabei wird $\overline{\mathbb{R}}$ mit seiner natürlichen Ordnung $-\infty < x < \infty$, $x \in \mathbb{R}$, versehen und wir sagen :

$$f : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ ist } \lambda\text{-messbar} \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f^{-1}(\{-\infty\}),\ f^{-1}(\{+\infty\}),\ f^{-1}(I) \ \ (I \text{ offen } \subset \mathbb{R}) \\ \qquad \lambda\text{-messbar.} \end{cases}$$

Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ treten z.B. als Limiten von Folgen $f_n : X \to \mathbb{R}$ auf.

Satz 24.1 : (Rechenregeln für messbare Funktionen)

Sei λ Maß auf X.

(i) Sind $f, g : X \to \mathbb{R}$ λ-messbar, so auch $f + g$, $f \cdot g$, $|f|$, $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$. Für $g \neq 0$ hat man λ-Meßbarkeit von f/g.

(ii) Sei $f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge λ-messbarer Funktionen. Dann sind $\inf\limits_k f_k$, $\sup\limits_k f_k$, $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$, $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k$ λ-messbar.

(iii) Seien Y, X topologische Räume, $g : Y \to Z$ stetig und $f : X \to Y$ λ-messbar. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ λ-messbar.

(iv) $f : X \to \mathbb{R}^n$ λ- messbar $\iff$ jede Komponente λ-messbar

Bemerkung :

In (i) darf man $\overline{\mathbb{R}}$ als Bild nur dann zulassen, wenn keine Ausdrücke vom Typ $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ auftreten. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und $g : X \to \mathbb{R}$ ist für $f + g$ möglich.

Beweis :

(i) Es ist für $a \in \mathbb{R}$

$$(*) \quad (f+g)^{-1}(-\infty, a) = \bigcup_{\substack{r,s\in\mathbb{Q} \\ r+s<a}} \big(f^{-1}(-\infty, r) \cap g^{-1}(-\infty, s)\big)\,,$$

woraus λ-Meßbarkeit von $f + g$ folgt.

Beweis von $(*)$:

„$\subset$" :

$$x \in (f+g)^{-1}(-\infty,a) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x)+g(x)<a$$

Setze $\varepsilon := a - (f(x)+g(x)) > 0$ und wähle $r,s \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) < r < f(x)+\frac{\varepsilon}{3}, \quad g(x) < s < g(x)+\frac{\varepsilon}{3}$

$$\Longrightarrow \quad x \in f^{-1}(-\infty,r) \cap g^{-1}(-\infty,x)$$

und

$$\begin{aligned} r+s < f(x)+g(x)+\tfrac{2}{3}\varepsilon &= \tfrac{2}{3}\left(a-(f(x)+g(x))\right)+f(x)+g(x) \\ &= \tfrac{2}{3}a+\tfrac{1}{3}\left(f(x)+g(x)\right) < a. \end{aligned}$$

„$\supset$" :

Sei $f(x) < r$, $g(x) < s$ für $r,\, s \in \mathbb{Q}$, $r+s<a$. Dann :

$$f(x)+g(x) < r+s < a \implies x \in (f+g)^{-1}(-\infty,a).$$

Wir zeigen λ-Meßbarkeit von f^2:

$$a \geq 0 \implies (f^2)^{-1}(-\infty,a) \;=\; \underbrace{f^{-1}(-\infty,\sqrt{a}) \;-\; f^{-1}(-\sqrt{a},\infty)}_{\lambda\text{-messbar}}$$

$$a < 0 \implies (f^2)^{-1}(-\infty,a) \;=\; \emptyset$$

Daraus folgt λ-Meßbarkeit von $f\cdot g$, denn

$$f\cdot g = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right],$$

d.h. $f\cdot g$ ist Summe von Quadraten und damit messbar.

Rest von (i) : $\quad\rightarrow$ Übung!

Bemerkung :

$$\begin{aligned} f^+ &:= f\cdot\chi_{f^{-1}([0,\infty))}, && \text{ist } \lambda\text{-messbar} \\ f^- &:= -f\cdot\chi_{f^{-1}((-\infty,0])} && \text{-} \end{aligned}$$

für λ-messbare f, da $f^{-1}(\dots)$ λ-messbar. Daraus folgt λ-Meßbarkeit von

$$|f| = f^+ + f^-,\ \max\{f,g\} = (f-g)^+ + g,\ \min\{f,g\} = -(f-g)^- + g.$$

Weiter im Beweis von 24.1 :

(ii) Seien $f_k : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ λ-messbar

$$\Longrightarrow \quad \left(\inf_{k\in\mathbb{N}} f_k\right)^{-1}([-\infty,a)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}([-\infty,a))$$

$$\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k\right)^{-1}([-\infty,a]) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f_k^{-1}([-\infty,a])$$

$$\Longrightarrow \quad \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k,\ \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k \text{ sind } \lambda\text{-messbar}$$

(Diese Funktionen können durchaus $\equiv -\infty$ bzw. $+\infty$ sein!)

Gemäß

$$\begin{aligned} \liminf_{k\to\infty} f_k &= \sup_{m\geq 1} \{\inf_{k\geq m} f_k\}, \\ \limsup_{k\to\infty} f_k &= \inf_{m\geq 1} \{\sup_{k\geq m} f_k\} \end{aligned}$$

folgend daraus die anderen Behauptungen von (ii).

Spezialfall :

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \text{ existiert für } x\in X \quad \Longrightarrow \quad f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ ist } \lambda\text{-messbar.}$$

(iii) (iv) $\quad\rightarrow\quad$ **Übung!**

$\square$

Satz 24.2 : Zerlegung messbarer Funktionen ≥ 0

Sei λ ein Maß auf der Menge X, $f : X \longrightarrow [0,\infty]$ sei λ-messbar.
Zu jeder Folge $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$r_k > 0, \quad r_k \to 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} r_k = \infty$$

gibt es eine Folge $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ **λ-messbarer Teilmengen von X** *mit*

$$\boxed{f = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \cdot \chi_{A_k}.} \quad \leftarrow \quad \textit{(}\textbf{punktweise Konvergenz!}\textit{)}$$

Spezialfall : $\quad r_k = 1/k$.

Beweis :

Sei $r_k = 1/k$, die allgemeine Aussage folge genauso. Setze induktiv

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{x\in X : f(x) \geq 1\}, \\ A_k &:= \{x\in X : f(x) \geq \tfrac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \tfrac{1}{j}\chi_{A_j}(x)\}, \quad k\geq 2. \end{aligned}$$

1.) Es gilt:

$$f \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \; \chi_{A_k}$$

<u>Fall 1</u> : $x \notin \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq 0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x)$

<u>Fall 2</u> : $x \in A_k$ für **nur endlich** viele k.

Sei $k_\circ := \max\{k \in \mathbb{N} : x \in A_k\}$. Dann ist $x \in A_{k_\circ}$

$$\overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} f(x) \geq \frac{1}{k_\circ} + \sum_{j=1}^{k_\circ - 1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^{k_\circ} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x).$$

<u>Fall 3</u> : $x \in A_{k_m}$ für eine Folge $k_m \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} \infty$.

Zu jedem $N \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k_m \geq N$, also

$$\begin{aligned} f(x) \quad & \overset{x \in A_{k_m}}{\geq} \quad \tfrac{1}{k_m} + \sum_{j=1}^{k_m - 1} \tfrac{1}{j} \chi_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^{k_m} \tfrac{1}{j} \chi_{A_j}(x) \\ & \geq \quad \sum_{j=1}^{N} \tfrac{1}{j} \chi_{A_j}(x) \end{aligned}$$

Mit $N \to \infty$ folgt die Behauptung aus 1.).

2.) Ist $f(x) = \infty$, so folgt $x \in A_k$ für alle k, also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = f(x)$$

Im Fall $f(x) < \infty$, gilt $x \notin A_n$ für unendlich viele n
(sonst Widerspruch zu 1.) und der Divergenz der harm. Reihe).

Für jedes solche n ist per Def. von A_n

$$f(x) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) \leq \frac{1}{n}$$

Nach 1.) ist die linke Seite ≥ 0, $n \to \infty$ ergibt die Behauptung

$\square$

<u>Wir wissen</u> : λ Borel Maß auf $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ stetig $\Longrightarrow$ f λ-messbar.

Was kann man über die Stetigkeitseigenschaften messbarer Funktionen aussagen ?

Meßbare Funktionen lassen sich dem Maße nach durch stetige Funktionen approximieren bzw. sind bereits größtenteils stetig.

Satz 24.3 : (von Lusin)

Sei λ ein Borel-reguläres Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ λ-messbar. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ λ-messbar mit $\lambda(A) < \infty$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine **kompakte** *Menge $K = K_\varepsilon$ mit $K \subset A$ und $\lambda(A - K) < \varepsilon$, so dass $f|_k : K \longrightarrow \mathbb{R}^N$ stetig ist.*
(Das bedeutet nicht, dass f an jeder Stelle $x_\circ \in K$ stetig ist, lediglich $f|_K$ hat diese Eigenschaft.)

Bemerkung :

Allgemeine Versionen finden sich bei Federer, 2.3.5.

Beweis :

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ zerlege den Bildraum in der Form

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij}$$

mit **disjunkten** Borel-Mengen B_{ij} (d.h. $B_{i\ell} \cap B_{ik} = \emptyset$ für $\ell \neq k$),
wobei $\operatorname{diam} B_{ij} < \frac{1}{i}$ (konkret: Würfelzerlegung von $\mathbb{R}^N$).
[Gemeinsame Seiten werden jeweils nur einem Würfel zugeschlagen!]
Die Mengen

$$A_{ij} := f^{-1}(B_{ij}) \cap A$$

sind λ-messbar und

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$$

für jedes i. Nach 23.4 (beachte $\lambda(A) < \infty$) ist $\nu := \lambda \lfloor A$ ein Rodon-Maß, der Zusatz zu 23.5 liefert **kompakte** Mengen $K_{ij} \subset A_{ij}$ mit

$$\nu(A_{ij} - K_{ij}) \leq \varepsilon \cdot 2^{-(i+j)}.$$

Es folgt :

$$\begin{aligned}
\lambda\Big(A - \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}\Big) &= \nu\Big(A - \bigcup_{j=1}^{\infty} K_{ij}\Big) \\
&= \nu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_{ii} - K_{ii})\Big) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_{ii} - K_{ii}) \\
&\leq \varepsilon \cdot 2^{-i}.
\end{aligned}$$

Aus $\lambda(A) < \infty$ und $\lim\limits_{N\to\infty} \lambda\Big(A - \bigcup\limits_{j=1}^{N} K_{ij}\Big) = \lambda\Big(A - \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_{ij}\Big)$

folgt : $\exists\, N(i) \in \mathbb{N}$ mit

$$(+) \quad \lambda\Big(\underbrace{A - \bigcup_{j=1}^{N(i)} K_{ij}}_{=:D_i}\Big) \leq 2\varepsilon \cdot 2^{-i}.$$

Die Mengen D_i sind kompakt. Für $i,\, j \in \mathbb{N}$ wähle $b_{ij} \in B_{ij}$ beliebig und setze

$$g_i : D_i \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad g_i(x) := b_{ij}, \text{ falls } x \in K_{ij}.$$

Da $K_{ij}, \ldots, K_{iN(i)}$ paarweise disjunkt sind und somit (als kompakte Mengen) Abstand > 0 haben, **ist g_i stetig**. Außerdem :

$$(*) \quad |f(x) - g_i(x)| \leq \frac{1}{i}$$

für alle $x \in D_i$, da $\operatorname{diam} B_{ij} < \frac{1}{i}$. Sei schließlich $K := \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i$, dann gilt :

$$K \subset A \text{ ist kompakt, } g_i \rightrightarrows f \text{ nach } (*) \text{ und daher ist } f|_K \text{ stetig.}$$

Außerdem :

$$\lambda(A - K) = \lambda\Big(A - \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A - D_i) \overset{(+)}{\leq} 2\varepsilon.$$

□

Korollar :

Sei λ ein Borel-reguläres Maß auf $\mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ sei λ-messbar mit $\lambda(A) < \infty$.
$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ sei λ-messbar. Dann gibt es zu jedem $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ eine stetige Funktion

$$\overline{f} = \overline{f}_\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ mit } \lambda\left(\{x \in A : f(x) \neq \overline{f}(x)\}\right) < \varepsilon.$$

Beweis :

Wähle nach dem Satz $K \subset A$ kompakt mit

$$\lambda(A - K) < \varepsilon \text{ und } f|_K : K \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ stetig.}$$

$f|_K$ läßt sich zu einer stetigen Funktion $\overline{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ fortsetzen.
(nicht trivial, benutzt das „Lemma von der Zerlegung der Eins" $\rightarrow$ **Übung!**)

genauer : Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $g : K \to \mathbb{R}^N$ stetig, so gibt es eine stetige Fortsetzung $\overline{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$.

Gemäß $\{x \in A :\ f(x) \neq \overline{f}(x)\} \subset A - K$ folgt die Behauptung.

□

Definition 24.2 :

Sei λ ein Maß auf der Menge X, $A \subset X$. Eine Eigenschaft gilt **$\boldsymbol{\lambda}$-fast überall auf $\boldsymbol{A}$** *(λ-f.ü.), wenn sie bis auf eine λ-Nullmenge $A_\circ \subset A$ richtig ist.*

Beispiele :

1.) $f = \chi_{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}$ ist $\mathcal{L}^1$-f.ü. $= 1$, denn $f(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}$ ist $\mathcal{L}^1$-Nullmenge.

2.) Sei λ ein Maß auf X, Y ein topologischer Raum und $f : X \longrightarrow Y$ sei λ-messbar. Ist $g : X \longrightarrow Y$ λ-f.ü. gleich f, also $\lambda(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, so ist g λ-messbar.

Beweis : $\rightarrow$ **Übung!**

Der folgende Satz zeigt : *punktweise Konvergenz liefert glm. Konvergenz abgesehen von „kleinen" Restmengen.*

Satz 24.4 : (von Egoroff)

Sei λ ein Maß auf der Menge X, die $f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}^N$ seien λ-messbar. $A \subset X$ sei λ-messbar mit $\lambda(A) < \infty$, und es gelte $f_k \longrightarrow g$ λ-f.ü. auf A. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine λ-messbare Menge $B \subset A$ mit

$$\lambda(A - B) < \varepsilon \quad \textit{und} \quad f_k \rightrightarrows g \ \textit{(gleichmäßig!) auf } B.$$

Beweis :

Sei $C_{i,j} := \bigcup\limits_{k=j}^{\infty} \{x : |f_k(x) - g(x)| > 2^{-i}\}$.

Dann gilt $C_{i,j+1} \subset C_{i,j}$ und somit (wegen $\lambda(A) < \infty$)

$$\lim_{j\to\infty} \lambda(A \cap C_{i,j}) = \lambda\Big(A \cap \bigcap_{j=1}^{\infty} C_{i,j}\Big)$$

für jedes $i \in \mathbb{N}$.

Sei $x \in A \cap \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} C_{i,j}$. Dann heißt $x \in A \cap C_{i,j}$:

$$\exists\, k_1 \geq 1 \text{ mit } |f_{k_1}(x) - g(x)| > 2^{-i}.$$

Außerdem gehört x auch zu $A \cap C_{i,k_1+1}$, d.h.

$$\exists\, k_2 \geq k_1 + 1 \text{ mit } |f_{k_2}(x) - g(x)| > 2^{-i}, \text{ usw.}$$

Man gewinnt eine Teilfolge $\{f_{k_\ell}(x)\}$, $k_\ell \overset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, mit der Eigenschaft

$$|f_{k_\ell}(x) - g(x)| > 2^{-i} \quad \forall\, \ell, \text{ d.h.} \quad f_m(x) \not\to g(x) \text{ bei } m \to \infty.$$

Die Menge der Punkte x aus A, bei denen keine Konvergenz gegen $g(x)$ vorliegt, haben nach Vor. λ-Maß 0, also

$$\lim_{j\to\infty} \lambda(A \cap C_{i,j}) = 0 \quad \forall\, i.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ wähle man $N(i)$ mit

$$\lambda(A \cap C_{i,N(i)}) < \varepsilon \cdot 2^{-i}$$

und setze

$$B := A - \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{i,N(i)} \implies \lambda(A - B) \le \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A \cap C_{i,N(i)}) < \varepsilon.$$

Es gilt

$$(*) \qquad |f_m(x) - g(x)| \le 2^{-i}$$

für alle $x \in B$ und alle $m \ge N(i)$, also $f_m \rightrightarrows g$ auf B.
Wäre nämlich für ein $x \in B$ und ein $m \ge N(i)$

$$|f_m(x) - g(x)| > 2^{-i},$$

so hätte man $x \in C_{i,N(i)}$, was $B \cap C_{i,N(i)} = \emptyset$ widerspricht.

$\square$

Definition 24.3 : Konvergenz dem Maße nach

Sei λ ein Maß auf X, $f_k, f : X \to \mathbb{R}^n$ seien λ-messbar. Sei $A \subset X$ λ-messbar.
$\{f_k\}$ **konvergiert dem Maße nach auf A gegen f** *, wenn :*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda\left(\{x \in A : |f_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}\right) = 0 \quad \textit{für alle } \varepsilon > 0.$$

Korollar: (zu Egoroff)

Sei λ ein Maß auf X, $A \subset X$ messbar mit $\lambda(A) < \infty$, und des gelte $f_k \longrightarrow f$ f.ü. auf A für die λ-messbaren Funktionen f_k, f. Dann gilt :

$f_k \longrightarrow f$ auf A dem Maße nach.

Hierbei sind f_k, f $\mathbb{R}^n$-wertig.

Beweis :

Sei für gegebenes $\varepsilon > 0$

$$E_k(\varepsilon) := \{x \in A : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Zu zeigen : $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda(E_k(\varepsilon)) = 0.$

Sei $\delta < \varepsilon$. Nach Egoroff gibt es $E \subset A$ messbar mit $\lambda(E) < \delta$ und $f_k \rightrightarrows f$ auf $A - E$. Es gibt also $k(\delta)$ mit

$$|f_k(x) - f(x)| < \delta$$

für alle $x \in A - E$, $k \geq k(\delta)$. Daraus folgt

$$E_k(\varepsilon) \subset E$$

gemäß $\delta < \varepsilon$.

Also :

$$\lambda(E_k(\varepsilon)) < \delta \quad \forall\, k \geq k(\delta),$$

d.h.

$$\lim_{k\to\infty} \lambda(E_k(\varepsilon)) = 0.$$

□

Man kann das Korollar teilweise umkehren, d.h. punktweise Konvergenz λ-f.ü. auf A ist nur **etwas** stärker als nur Konvergenz dem Maße nach.

Satz 24.5 : (von Riesz)

Sei λ ein Maß auf X, $A \subset X$ sei λ-messbar. $f_k,\ f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ seien λ-messbar mit $f_k \to f$ dem Maße nach auf A. Dann gibt es eine Teilfolge, die λ-f.ü. auf A gegen f konvergiert.

Bemerkung :

Die Folge selbst muß nicht λ-f.ü. auf A gegen f konvergieren.

Beweis :

vgl. H.Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie.

Definition 24.4 : *(noch eine Aussage über die Struktur messbarer Funktionen)*

Sei X eine Menge. $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt eine **einfache Funktion**, *wenn f* **nur endlich viele** *verschiedene Werte annimmt.*
Mit Bild$f = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ und $A_k := \{x : f(x) = \alpha_k\}$ gilt :

$$f = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \, \chi_{A_k}.$$

Satz 24.6 :

Sei λ ein Maß auf der Menge X und $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ sei λ-messbar. Dann gibt es eine Folge $\{f_k\}$ von **reellwertigen $\boldsymbol{\lambda}$-messbaren Funktionen $\boldsymbol{f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}}$** *mit folgenden Eigenschaften :*

- f_k *ist* **einfach**
- $|f_k| \leq |f_{k+1}|$
- $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ *für alle $x \in X$.*

Ist f beschränkt, so gilt : $f \rightrightarrows f$ auf X.

Ist $f \geq 0$, so gilt : $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_k \leq f$.

Beweisskizze :

Sei $f \geq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq 2^n \cdot n$ sei

$$\begin{aligned} A_{n,k} &:= \left\{x \in X : \tfrac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \tfrac{k}{2^n}\right\}, \\ B_n &:= \{x \in X : f(x) \geq n\}. \end{aligned}$$

Die Mengen $A_{n,k}$, B_n sind λ-messbar

$$\Longrightarrow \quad f_n(x) := \sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \, \chi_{A_{n,k}}(x) + n \, \chi_{B_n}(x)$$

ist λ-messbare, einfache Funktion ≥ 0.

Es gilt:

(1) $\boldsymbol{f_n(x) \leq n \quad \forall x \in X}$,
denn ist $f(x) \geq n$, so folgt $x \notin A_{n,k}$ für $k = 1, \ldots, n2^n$,
so dass $f_n(x) = n \cdot \chi_{B_n}(x) = n$.
Ist hingegen $f(x) < n$, so folgt

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot \chi_{A_{n,k}}(x) = \frac{j-1}{2^n},$$

wenn $\frac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{j}{2^n}$ für ein $j \in \{1, \ldots, n \cdot 2^n\}$.
Offenbar ist aber $\frac{j-1}{2^n} < n$.

Außerdem gilt :

(2) $f_n \leq f_{n+1} < f$ (Monotonie)

und

(3) $|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n} \quad \forall\, x \notin B_n$

<u>zu (2)</u> :

$f_n \leq f$ wurde unter (1) schon erledigt, die Ungleichung $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ rechnet man mit Fallunterscheidung nach.

Ist $x \notin B_n$ also $f(x) < n$, so gilt :

$$f(x) \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}) \quad \text{für genau ein } k \in \{1, \ldots, n \cdot 2^n\}$$

und somit

$$f_n(x) = \frac{k-1}{2^n}.$$

Das bedeutet

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < 2^{-n} \quad \forall\, x \notin B_n.$$

Ist also $f(x) = \infty$, so folgt $f_n(x) = n$ für alle n, mithin $f_n(x) \to f(x)$.

Für $f(x) < \infty$ ist $x \notin B_n$ für $n \geq n_\circ > f(x)$, also gilt nach (3) ebenfalls $f_n(x) \to f(x)$.

Sei f beschränkt, also $f(x) \leq c$. Gemäß (3) gilt wieder

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < 2^{-n} \quad \forall\, n \geq n_\circ > c.$$

Daher :

$$f_n \rightrightarrows f.$$

Hat f beliebiges Vorzeichen, so zerlegt man $f = f^+ - f^-$ und benutzt den ersten Beweisteil für $f^\pm$.

$\square$

25

(Lebesgue -) Integration

ist ein allgemeines Konzept zur Definition von $\int f d\lambda$, wenn λ ein Maß auf X ist und f eine λ-messbare Funktion $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Als „Spezialfälle" bekommen wir

- $\int_a^b f(t)\,dt$ für Regelfunktionen $f:\,[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
- Volumenintegrale $\int\limits_{\Omega} f(x_1,\dots,x_n)\,d\mathcal{L}^n(x_1,\dots,x_n)$ über Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sowie Verfahren zur Berechnung.
- unendliche (Zahlen-) Reihen als Integrale bzgl. spezieller Maße.

Definition 25.1 :

(a) *Sei λ ein Maß auf X. Eine Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt* **$\boldsymbol{\lambda}$-Treppenktion**, *falls* **Bild $\boldsymbol{f}$ abzählbar** *und* **$\boldsymbol{f}$ bzgl. des Maßes $\boldsymbol{\lambda}$ messbar** *ist.*

(b) *Sei $g \geq 0$ λ-Treppenfunktion. Man setzt :*

$$\boxed{\int g\,d\lambda := \sum_{y\in[0,\infty)} y\cdot\lambda(g^{-1}(\{y\}))} \quad \textit{mit der Vereinbarung } \mathbf{0\cdot\infty = 0}.$$

$\int g\,d\lambda \in [0,\infty]$ *heißt* **$\boldsymbol{\lambda}$-Integral von $\boldsymbol{g}$**, *andere Schreibweisen (mit Angabe der Integrationsvariable) : $\int g(x)\,d\lambda(x)$, $\int g(y)\,d\,\lambda(y)$, etc.*

Bemerkungen :

(1) Da $g^{-1}(\{y\})$ nur für höchstens abzählbar viele $y \geq 0$ nicht-leer ist, macht die Summe Sinn in $[0,\infty]$.

(2) Es sei ausdrücklich betont, dass λ-Treppenfunktionen **nur reelle Werte** annehmen dürfen (Funktionen $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ werden wir später betrachten). Der Grund hierfür ist, dass man Treppenfunktionen addieren will, ohne auf Terme der Form $\infty - \infty$ zu kommen.

(3) Die Konvention „$0\cdot\infty = 0$" läßt sich so erklären :
ist $g \equiv 0$ auf einer Menge mit λ- Maß ∞, so liefert dies anschaulich keinen Beitrag zum Integral.

(4) **Beispiele :**

a) Sei $\{\alpha_n\}$ eine Folge in $[0, \infty)$. Setze

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow [0, \infty), \;\; g(n) := \alpha_n$$

(das war ja unsere ursprüngliche Def. von Folgen!) und

$$\lambda := \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \quad \delta_n(A) := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A \end{array} \right\}, \;\; A \subset \mathbb{N}.$$

Dann ist λ ein Maß auf $\mathbb{N}$ mit (beachte : g Treppenfunktion!)

$$\int g \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y \geq 0} y \cdot \delta_n(\{x : g(x) = y\}) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n) = \sum_{n} = 1^{\infty} \alpha_n.$$

Also kann man die Theorie der Reihen mit Gliedern ≥ 0 als Spezialfall wiedererkennen.

b) $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ ist $\mathcal{L}^1$-Treppenfunktion mit $\int f \, d\mathcal{L}^1 = 0$! ($\chi_{\mathbb{Q}}$ ist nicht Riemann integrierbar)

Definition 25.2 : Integral von Treppenfunktion mit beliebigem Vorzeichen

Sei $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine λ-Treppenfunktion mit

$$(*) \qquad \int g^+ \, d\lambda < \infty \;\; \textbf{oder} \;\; \int g^- \, d\lambda < \infty,$$

wobei $g^+ := \max\{0, g\}$, $g^- := -\min\{0, g\}$, also $g = g^+ - g^-$.

$$\boxed{\textbf{Das } \boldsymbol{\lambda}\textbf{-Integral von } \boldsymbol{g} \textbf{ ist } \int \boldsymbol{g \, d\lambda := \int g^+ \, d\lambda - \int g^- \, d\lambda}.}$$

*Im Fall $(*)$ nennen wir **g λ-integrierbar**.*

Bemerkungen :

(1) Aus $(*)$ folgt, dass „$\infty - \infty$" nicht eintritt.

(2) g λ-integrierbar $\Longrightarrow$ $\int g \, d\lambda = \sum_{y \in \mathbb{R}} y \cdot \lambda(g^{-1}(\{y\}) \in \overline{\mathbb{R}}$.

(3) g λ-Treppenfunktion $\Longrightarrow$ g^+, g^- λ-Treppenfunktionen.

Der folgende Satz ist $\rightarrow$ **Übung!**

Satz 25.1 :

Seien $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ λ-Treppenfunktionen und $r \in \mathbb{R}$. Dann ist $r \cdot f + g$ λ-Treppenfunktion. **Sind $\boldsymbol{f, g}$ $\boldsymbol{\lambda}$-integrierbar, so auch $\boldsymbol{r \cdot f + g}$** *mit*

$$\boxed{\int (r \cdot f + g)\, d\lambda = r \cdot \int f\, d\lambda + \int g\, d\lambda} \; ,$$

! vorausgesetzt die rechte Seite ist kein unbestimmter Ausdruck !

Insbesondere folgt λ-Integrierbarkeit von $r \cdot f + g$ **im Fall** $\int f\, d\lambda$, $\int g\, d\lambda \in \mathbb{R}$.

□

Wir definieren jetzt das λ-Integral allgemeiner Funktionen durch Approximation mit Treppenfunktionen.

Definition 25.3 : **$\boldsymbol{\lambda}$-Integral** *(von messbaren Funktionen)*

Sei λ ein Maß auf der Menge X und $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ λ-messbar.

(i) *Das* **$\boldsymbol{\lambda}$-Oberintegral von $\boldsymbol{f}$** *ist definiert durch*

$$\overset{*}{\int} f\, d\lambda := \inf \left\{ \int g\, d\lambda : \begin{array}{l} g \textit{ ist } \lambda\textit{-integrierbare Treppenfunktion} : X \longrightarrow \mathbb{R} \\ \textit{mit } g \geq f \;\; \lambda\textit{-f.ü.} \end{array} \right\}.$$

Ist $f = \infty$ auf einer Menge mit positivem Maß, so gibt es **keine** *λ-Treppenfunktion g mit $g \geq f$ f.ü.*

Dann sei $\overset{*}{\int} f\, d\lambda := +\infty$ $(\inf\{\ldots\} = \emptyset)$

(ii) *Das* **$\boldsymbol{\lambda}$-Unterintegral von $\boldsymbol{f}$** *ist erklärt durch*

$$\underset{*}{\int} f\, d\lambda := \sup \left\{ \int h\, d\lambda : \begin{array}{l} h \textit{ ist } \lambda\textit{-integrierbare Treppenfunktion} : X \longrightarrow \mathbb{R} \\ \textit{mit } h \leq f \;\; \lambda\textit{-f.ü.} \end{array} \right\}.$$

Man setzt : $\underset{*}{\int} f\, d\lambda := -\infty$ *, falls* $\sup\{\ldots\} = \emptyset$.

(iii) *f heißt* **$\boldsymbol{\lambda}$-integrierbar** $\;:\Longleftrightarrow\;$ $\underset{*}{\int} f\, d\lambda = \overset{*}{\int} f\, d\lambda$ *in* $\overline{\mathbb{R}}$.

Den gemeinsamen Wert von Ober- und Unterintegral bezeichnet man dann mit

$$\int \boldsymbol{f\, d\lambda}.$$

Achtung :
$\int f\, d\lambda$ *ist* **nicht notwendig** *eine reelle Zahl, es ist durchaus* $\int f\, d\lambda = \pm\infty$ *möglich. Manche Bücher benutzen integrierbar nur im Fall* $\int f\, d\lambda \in \mathbb{R}$.

(iv) *Ist f λ-integrierbar und $\int f\, d\lambda \in \mathbb{R}$, so nennen wir f* **$\boldsymbol{\lambda}$-summierbar**.

Satz 25.2 : Eigenschaften von $\int_*$ und $\int^*$

Sei λ ein Maß auf X, f, $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ seien λ-messbar.
(für Treppenfunktionen sind $\int_*$ und $\int^*$ gleich dem Integrtal aus Def.25.1)

(0) $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *λ-integrierbare Treppenfunktion* $\Longrightarrow \int_* f\,d\lambda = \int^* f\,d\lambda$

(für Treppenfunktionen sind $\int_*$ und $\int^*$ gleich dem Integral aus Def.25.1)

(1) $f \le g$ *λ-f.ü.* $\Longrightarrow \int^* f\,d\lambda \le \int^* g\,d\lambda$ *(analog für $\int_*$)*

$\Rightarrow$ *(2)* $f \ge 0$ *λ-f.ü.* $\Longrightarrow \int^* f\,d\lambda \ge 0,\ \int_* f\,d\lambda \ge 0$

(3) $\int^* f\,d\lambda < \infty \Longrightarrow \int^* f^+\,d\lambda < \infty$ *und* $f(x) < \infty$ *für λ-f.a. $x \in X$*

(4) *für* $0 < c < \infty$ *ist* $\int^* (c \cdot f)\,d\lambda = c \int^* f\,d\lambda$

(Übung!) $\rightarrow$ *(5)* $\int^* f\,d\lambda + \int^* g\,d\lambda < \infty \overset{\text{definiert}}{\Longrightarrow} \int^* (f+g)\,d\lambda \le \int^* f\,d\lambda + \int^* g\,d\lambda$

(6) $\int_* f\,d\lambda = -\int^* (-f)\,d\lambda$ *(dadurch braucht man vieles nur für $\int^*$ zu beweisen)*

(7) $\int_* f\,d\lambda \le \int^* f\,d\lambda.$

Beweis :

(6)
$$\begin{aligned}
\int_* f\,d\lambda &= \sup\{\textstyle\int h\,d\lambda : \ldots h \le f \ \ \lambda\text{-f.ü.}\}\\
&= \sup\{-\textstyle\int (-h)\,d\lambda : \ldots -h \ge -f \ldots\}\\
&= -\inf\{\textstyle\int (-h)\,d\lambda : \ldots -h \ge -f \ldots\}\\
&= -\inf\{\textstyle\int g\,d\lambda : g \text{ ist } \lambda\text{-integrierbare T.F. mit } -f \le g \text{ f.ü.}\}\\
&= -\int^* (-f)\,d\lambda.
\end{aligned}$$

(0) Sei h eine λ-T.F. mit $h \ge f$ λ-f.ü. Angenommen $\int h\,d\lambda < \int f\,d\lambda$ (Integral nach Def. 25.2). Dann ist $f - h$ λ-integrierbare T.F. mit

$$\int (f-h)\,d\lambda \overset{\text{S.25.1}}{=} \int f\,d\lambda - \int h\,d\lambda > 0.$$

Gemäß $f - h \le 0$ λ-f.ü., ist aber trivialerweise

$$\int (f-h)\,d\lambda \overset{\text{Def.25.2}}{=} \underbrace{\int (f-h)^+\,d\lambda}_{=0} - \underbrace{\int (f-h)^-\,d\lambda}_{=0} \le 0,$$

also folgt

$$\begin{aligned}\int h\,d\lambda &\geq \int f\,d\lambda, \text{ d.h. (nach Übergang zu inf bzgl. } h)\\ \int^* f\,d\lambda &\geq \int f\,d\lambda.\end{aligned}$$

Dass $\int^* f\,d\lambda \geq \int f\,d\lambda$ ist, folgt aber trivialerweise, da ja f selbst λ- T.F.
Analog für $\int_* f\,d\lambda$.

(1) $\{h : h\ \ \lambda\text{-Treppenfunktion} \geq g\ \ \lambda\text{-f.ü. }\} \subset \{h : h\ \ \lambda\text{-T.F.} \geq f\ \ \lambda\text{-f.ü.}\}$

$\Longrightarrow\ \inf\{\int h\,d\lambda : \ldots h \geq g \ldots\} \geq \inf\{\int h\,d\lambda : \ldots h \geq f \ldots\}.$

$\Longrightarrow\ \int^* g\,d\lambda \geq \int^* f\,d\lambda$ (entsprechend für $\int_*$)

der 1te Teil von (2) folgt aus (1) wegen $\int^* 0\,d\lambda = 0$, wenn man in (1) g=0 wählt.

für das Unterintegral : z.z. : $f \geq 0 \Longrightarrow \int_* f \geq 0$

Sei h λ-integrierbare T.F. mit $h \leq f$ f. ü., d.h. speziell : $\int h^+ d\lambda - \int h^- d\lambda$ ist definiert.

Wegen $f \geq 0$ ist h^+ dann λ-integrierbare T.F. mit $h^+ \leq f$.

Aus $\int h^+ d\lambda \geq 0$ (Def. 25.1) folgt :

$$\sup\{\int \rho\,d\lambda : \rho\ \lambda\text{-integrierbare T.F. } \leq f\ \lambda\text{-f.ü.}\} \geq 0, \text{ also } \int_* f\,d\lambda \geq 0.$$

(3) Sei $\int^* f\,d\lambda < \infty \quad \Longrightarrow \quad \exists\ \lambda$-integrierbare T.F. $g \geq f$ λ-f.ü. mit

$$\int g\,d\lambda < \infty, \text{ speziell } \int g^+\,d\lambda < \infty.$$

g ist λ-T.F. $\Longrightarrow g^+$ ist λ-T.F. $\Longrightarrow g^+$ ist reellwertig, also $g(x) < \infty$.

$f(x) \leq g^+(x)$ λ-f.ü. liefert dann

$$\lambda\left(\{x : f(x) = \infty\}\right) = 0.$$

Da $g^+ \geq f^+$ gilt (und g^+ λ-integrierbere T.F. ist), folgt :

$$\int^* f^+\,d\lambda \leq \int g^+ d\lambda < \infty.$$

Rest des Satzes $\rightarrow$ **Übung**

(4)
$$\begin{aligned}\int_* (cf) d\lambda &= \inf\{\int h\,d\lambda : \ldots h \geq cf \ldots \lambda\text{-f.ü.}\}\\ &= \inf\{c \cdot \int \tfrac{h}{c}\,d\lambda : \ldots \tfrac{h}{c} \geq f \ldots \lambda\text{-f.ü.}\}\\ &= \inf\{c \cdot \int g\,d\lambda : \ldots g \geq f \ldots \lambda\text{- f.ü.}\}\\ &= c \cdot \int^* f\,d\lambda.\end{aligned}$$

(5) $\rightarrow$ **Übung!** **(Hinweis: indirekt, benutze (3))**

(7) Seien h T.F. $\leq f$ und g T.F. $\geq f$.

$\overset{(0),(1)}{\Longrightarrow}$ $\int h\,d\lambda \leq \int g\,d\lambda$

nun bilde sup (inf) bzgl. h (g).

$\square$

Satz 25.3 : **Kriterien für Integrierbarkeit**

Sei λ ein Maß auf X, $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sei **$\boldsymbol{\lambda}$-messbar.**

(1) $f \geq 0$ *λ-f.ü.* $\Longrightarrow$ f **ist integrierbar** *mit* $\int f\,d\lambda \in [0,\infty]$

(2) f *integrierbar* $\Longrightarrow$ $c \cdot f$ *integrierbar für jedes* $c \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\int (c \cdot f) d\lambda = c \int f\,d\lambda \quad \textit{(Konvention : } 0 \cdot (\pm\infty) = 0\textit{)}$$

(3) Sind f *und* g *λ-integrierbar und ist* $\int f\,d\lambda + \int g\,d\lambda$ **kein** *undefinierter Ausdruck, so folgt λ-Integrierbarkeit von* $f+g$ *mit*

$$\int (f+g)\,d\lambda = \int f\,d\lambda + \int g\,d\lambda.$$

Speziell : $\boxed{f,\, g \text{ summierbar} \quad \Longrightarrow \quad f+g \text{ summierbar}}$ **!**

(4) Sind f, g *λ-integrierbar mit* $f \leq g$ *λ-f.ü., so ist*

$$\int f\,d\lambda \leq \int g\,d\lambda. \quad \textit{(Monotonie)}$$

(5) f *λ-integrierbar* $\Longleftrightarrow$ f^+ **oder** f^- *λ-summierbar.*

Dann : $$\int f\,d\lambda = \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda.$$

(6) f *λ-integrierbar* $\Longrightarrow$ *es gilt die Abschätzung*

$$\left|\int f\,d\lambda\right| \leq \int |f|\,d\lambda.$$

(7) f *λ-summierbar* $\Longleftrightarrow$ $|f|$ *λ-summierbar.*

(8) $f = g$ *λ-f.ü.,* f *integrierbar* $\Longleftrightarrow$ g *integrierbar, und die Integrale sind „=".*

Beweis :

(1) **Fall 1 :**

Sei $\lambda\left(f^{-1}\{\infty\}\right) > 0$. Setze $h := n \cdot \chi_{f^{-1}\{\infty\}}$.

h ist λ-T.F. mit $h \leq f$

$$\Longrightarrow n \cdot \lambda(f^{-1}\{\infty\}) \leq \int_* tf\, d\lambda, \text{ also } \int_* f\, d\lambda = \infty \text{ für } n \to \infty.$$

Aus 25.2 (7) folgt $\int^* f\, d\lambda = \infty$, so dass $\int f\, d\lambda = \infty$.

Fall 2 :

Sei $\lambda\left(f^{-1}\{\infty\}\right) = 0$. Für $t > 1$ zerlegen wir disjunkt

$$\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\{x : t^n \leq f(x) < t^{n+1}\}}_{=:A_n}$$

und setzen $g : X \longrightarrow [0, \infty)$

$$g(x) := \begin{cases} t^n & , \quad x \in A_n \text{ für ein } n \in \mathbb{Z} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Da f λ-f.ü. endlich ist, ist $t \cdot g$ eine λ-Treppenfunktion $\geq f$ λ-f.ü., d.h. :

$$\int^* f\, d\lambda \leq \int t \cdot g\, d\lambda \overset{\text{Satz 25.1}}{=} t \cdot \int g\, d\lambda \leq t \cdot \int_* f\, d\lambda, \text{ denn } g \text{ ist } \lambda\text{-T.F.} \leq f.$$

Im Fall $\int_* f\, d\lambda = \infty$ sind wir fertig (Satz 25.2 (7)).

Ist $\int_* f\, d\lambda < \infty$, so geht man zur Grenze $t \downarrow 1$

$\Longrightarrow \quad \int^* f\, d\lambda \leq \int_* f\, d\lambda$, also folgt die Behauptung.

(2) folgt aus Satz 25.2 (4) (Homogenität des Oberintegrals für Faktoren > 0 bzw. der entsprechenden Relation für $\int_*$, die man aus Satz 25.2 (6) bekommt).

(3) Seien f, g λ-summierbar, also $\int f\, d\lambda$, $\int g\, d\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Satz 25.2 (5)} \Longrightarrow \quad \int^* f\, d\lambda + \int^* g\, d\lambda \geq \int^* (f+g)\, d\lambda$$

$$\text{Also :} \quad \int f\, d\lambda + \int g\, d\lambda \geq \int_* (f+g)\, d\lambda$$

(da $\int^* = \int$ für f, g und $\int^* (f+g)\, d\lambda \geq \int_* (f+g)\, d\lambda$)

$$\begin{aligned} \text{Satz 25.2 (6)} \Longrightarrow \int_* (f+g)\, d\lambda &= -\int^* -(f+g)\, d\lambda \\ &\overset{25.1\,(5)}{\geq} -\left(\int^* (-f)\, d\lambda + \int^* (-g)\, d\lambda\right) \\ &\overset{(*)}{=} \int f\, d\lambda + \int g\, d\lambda, \end{aligned}$$

denn mit f, g sind auch $-f$, $-g$ λ-summierbar, so dass $(*)$ gilt. Zusammen folgt

$$\int (f+g)\,d\lambda = \int f\,d\lambda + \int g\,d\lambda.$$

Die Fälle $\int f\,d\lambda$, $\int g\,d\lambda \in \{\pm\infty\}$ diskutiert man analog. (Rest $\to$ Übung !)

(4) Sei $\int g\,d\lambda < \infty$

$$\begin{aligned}
&\overset{25.2\,(3)}{\Longrightarrow} && g(x) < \infty \text{ f.ü., also } f(x) \le g(x) < \infty\ \lambda\text{-f.ü.}\\
&\Longrightarrow && g - f \text{ ist definiert und } \ge 0\ \lambda\text{-f.ü.}\\
&\overset{(1)}{\Longrightarrow} && g - f \text{ ist } \lambda\text{-integrierbar mit } \textstyle\int (g-f)\,d\lambda \ge 0\\
&\overset{(2)}{\Longrightarrow} && f - g \text{ ist } \lambda\text{-integrierbar mit } \textstyle\int (f-g)\,d\lambda \le 0.
\end{aligned}$$

$\int g\,d\lambda + \int (f-g)\,d\lambda$ ist **kein** unbestimmter Ausdruck, daher gilt nach (3) :

$$\int g\,d\lambda + \underbrace{\int (f-g)\,d\lambda}_{\le 0} = \int f\,d\lambda \quad\Longrightarrow\quad \int g\,d\lambda \ge \int f\,d\lambda.$$

Im Fall $\int g\,d\lambda = \infty$ ist nichts zu zeigen.

(5) <u>„$\Longrightarrow$"</u> :

Sei f λ-integrierbar, also $\int_* f\,d\lambda = \int^* f\,d\lambda$.

<u>Fall 1</u> : $\int f\,d\lambda = \int^* f\,d\lambda < \infty$

Satz 25.2 (3) $\Longrightarrow \int^* f^+ d\lambda < \infty$

Satz 25.3 (1) $\Longrightarrow \int f^+ d\lambda = \int^* f^+ d\lambda$

Also ist f^+ λ-summierbar.

<u>Fall 2</u> : $\int f\,d\lambda > -\infty$

analog : f^- ist λ-summierbar.

Da einer der beiden Fälle offensichtlich eintreten muß, folgt „$\Longrightarrow$".

<u>„$\Longleftarrow$"</u> :

Sei f^+ oder f^- λ-summierbar

$\Longrightarrow \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda$ ist kein ungestimmter Ausdruck

$\overset{(3)}{\Longrightarrow} f = f^+ - f^-$ ist λ-integrierbar mit

$$\int f\,d\lambda = \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda$$

(6) $|f|$, f^+, f^- sind nach (1) λ-integrierbar, aus (3) folgt

$$\int |f|\,d\lambda = \int (f^+ + f^-)\,d\lambda = \int f^+ d\lambda + \int f^-\,d\lambda$$

Ist $\int |f| d\lambda < \infty$, so auch $\int f^+ d\lambda$, $\int f^- d\lambda$.
Aus $f \le |f|$, $-|f| \le f$ folgt mit (4)

$$-\int |f| d\lambda \le \int f d\lambda \le \int |f| d\lambda,$$

also die Abschätzung (6). Für $\int |f|\,d\lambda = \infty$ gilt sie trivialerweise.

Ist schließlich f summierbar, so folgt aus dem Beweis von (5), dass dann $f^\pm$ summierbar sein müssen. Die Gleichung aus (6)

$$\int |f| d\lambda = \int f^+ d\lambda + \int f^- d\lambda$$

liefert Summierbarkeit von $|f|$.

$\square$

Satz 25.4 :

1) Sei λ ein Maß auf X. Für λ-messbare Mengen $A \subset X$ gilt :

$\lambda(A) = \int \chi_A\,d\lambda.$

2) Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$. Dann gilt :

(i) Regelfunktionen $f \in \mathcal{R}([a,b])$ sind $\mathcal{L}^1$-messbar

(ii) $\chi_{[a,b]} \cdot f$ ist $\mathcal{L}^1$-integrierbar mit

$$\boxed{\int \chi_{[a,b]} f\,d\,\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(x)dx.}$$

Bemerkung zu 2) :

Rechts in (ii) steht das bekannte Integral von Regelfunktionen. Die Aussage von (ii) ist daher, dass das Integral von Regelfunktionen nichts anderes ist als das Integral bzgl. des eindim. Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$. Ist also f genügend gut, so können wir umgekehrt zur Bestimmung von $\int \chi_{[a,b]}\,f\,d\mathcal{L}^1$ alle Regeln für $\int_a^b f(x)\,dx$ benutzen.

Es gibt durchaus Funktionen, die nicht zur Klasse der Regelfunktionen gehören, die aber bzgl. $\mathcal{L}^1$ integrierbar sind.

Beispiel :

Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Dann :

$$\int_\circ^1 f(x)\,dx \quad \textbf{nicht definiert},$$

aber

$$\int^* \chi_{[0,1]} f\,d\mathcal{L}^1 = 0 = \int_* \chi_{[0,1]} f\,d\mathcal{L}^1,$$

da $f = 0 \quad \mathcal{L}^1$-f.ü. auf $[0,1]$.

$\square$

Notation :

$A \subset X$ λ-messbar, $f : A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\underbrace{\lambda\text{-messbar}}_{\text{bzgl. } \lambda\lfloor A}$. ($\Longleftrightarrow \chi_A f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ λ-messbar)

Dann :

$$\boxed{\int_A f\,d\lambda := \int \chi_A f\,d\lambda} \qquad \text{(sofern das Integral rechts existiert).}$$

Beweis von 25.4 :

1) $\rightarrow$ **Übung!**

2) Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Approximationssatz aus §12

$\Longrightarrow$ $\exists\, f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$,
wobei f_n **Treppenfunktion** bzgl. einer **endlichen** Zerlegung von $[a,b]$ ist.

$\Longrightarrow$ f_n ist $\mathcal{L}^1$-Treppenfunktion.

Somit ist f insbesondere punktweise Limes der $\mathcal{L}^1$-messbaren f_n, **also $\mathcal{L}^1$-messbar**.

Nun benutze 12.7 : zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^n f(z_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon \quad (*)$$

für jede Zerlegung $a = x_\circ < \ldots < x_n = b$ der Feinheit $< \delta$ und beliebiger Wahl von Stützstellen $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Wähle z_k so, dass $f(z_k) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ und setze

$$\varphi(x) := \begin{cases} f(z_k) & , \quad x \in (x_{k-1}, x_k) \\ \text{beliebig} & , \quad x \in \{x_\circ, \ldots, x_n\} \\ 0 & , \quad sonst \end{cases}$$

$\Longrightarrow \quad \varphi \geq f \;\; \mathcal{L}^1$-f.ü. auf $[a,b]$; $\varphi \;\; \mathcal{L}^1$-Treppenfunktion

$$\Longrightarrow \quad (1) \qquad \overset{*}{\int} \chi_{[a,b]}\, f\, d\mathcal{L}^1 \leq \int \varphi\, d\mathcal{L}^1 = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1})$$

Dann wähle $\tilde{z}_k$ mit $f(\tilde{z}_k) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ und bilde $\tilde{\varphi}(x)$ wie oben.

$$\Longrightarrow \quad (2) \qquad \underset{*}{\int} \chi_{[a,b]}\, f d\mathcal{L}^1 \;\geq\; \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{z}_k)(x_k - x_{k-1})$$

Nun Gilt :

$$\begin{aligned} 0 \leq \overset{*}{\int} - \underset{*}{\int} \quad &\leq \quad \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) \quad - \quad \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{z}_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \quad \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(t)\; dt \quad + \quad \int_a^b f(t)\; dt - \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{z}_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\overset{(*)}{\leq} \quad 2\varepsilon \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \underset{*}{\int} = \overset{*}{\int} = \int \chi_{[a,b]}\, f d\mathcal{L}^1$$

$$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} \quad \int_a^b f(t)\; dt - \varepsilon \leq \int \chi_{[a,b]}\, f d\mathcal{L}^1 \leq \int_a^b f(t)\; dt + \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \int \chi_{[a,b]}\, f d\mathcal{L}^1 = \int_a^b f(t)\; dt$$

□

Wir diskutieren jetzt **Konvergenzsätze für Folgen** vom Typ $\int f_n\, d\lambda$, bei denen $f_n \longrightarrow f$ in einem gewissen Sinn gilt.

Satz 25.5 : Lemma von Fatou

Sei λ ein Maß auf X und $f_k : X \longrightarrow [0, \infty]$ eine Folge nicht-negativer λ-messbarer Funktionen. Dann gilt :

$$\boxed{\int \left(\liminf_{k \to \infty} f_k \right) d\,\lambda \;\leq\; \liminf_{k \to \infty} \int f_k d\lambda.}$$

Verallgemeinerung : (ohne Vorzeichen)

$f_k \geq g$ λ-f.ü. mit g λ-summierbar

Beweis :

$f := \liminf_{k\to\infty} f_k$ ist λ-messbare Funktion ≥ 0, d.h. alle auftretenden Integrale sind definiert in $[0,\infty]$. Sei g eine λ-Treppenfunktion mit $0 \leq g \leq f$ λ-f.ü., also

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\, \chi_{A_j}, \quad a_j > 0, \quad A_j \ \lambda\text{-messbar, paarweise disjunkt.}$$

Man setzt für $0 < t < 1$, $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$

$$B_{j,k} := A_j \cap \{x : f_\ell(x) > ta_j \ \ \forall\, \ell \geq k\}.$$

Es gilt :

$$(1) \quad A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{j,\,k},$$

denn für $x \in A_j$ ist offenbar $f(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k(x) \geq g(x) = a_j > ta_j$.

Gäbe es kein $k \geq 1$ mit $x \in B_{j,k}$, so könnte man zu jedem k ein $\ell \geq k$ finden mit $f_\ell(x) \leq ta_j$, d.h. $\liminf_{\ell\to\infty} f_\ell(x) \leq ta_j$. Deshalb gilt (1).

Offenbar gilt auch :

$$(2) \quad B_{j,\,k} \subset B_{j,\,k+1} \quad (\subset A_j).$$

Gemäß $\ f_k \geq \sum_{j=1}^{N} f_k\, \chi_{a_j} \quad \forall\ N$ folgt (bei festem N)

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{A_j} f_k\, d\lambda \ = \ \sum_{j=1}^{N} \int \chi_{A_j} f_k\, d\lambda \ \leq \ \int f_k\, d\lambda$$

$$\Longrightarrow \quad \int f_k\, d\lambda \ \overset{B_{j,k}\subset A_j}{\geq} \ \sum_{j=1}^{N} \int_{B_{j,k}} f_k\, d\lambda \ \overset{\text{Def.}B_{j,k}}{\geq} \ t \cdot \sum_{j=1}^{N} a_j\, \lambda(B_{j,k})$$

$$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} \quad \liminf_{k\to\infty} \int f_k\, d\lambda \ \geq \ t \cdot \sum_{j=1}^{N} a_j\, \lambda(A_j) \ ,$$

denn $\lambda(B_{j,k}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda(A_j)$. Diese Abschätzung gilt für alle $N \in \mathbb{N}$, $N \to \infty$ ergibt :

$$\liminf_{k\to\infty} \int f_k\, d\lambda \ \geq \ t \cdot \int g\, d\lambda.$$

Mit $t \nearrow 1$ ergibt sich

$$\int g\, d\lambda \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k\, d\lambda$$

für jede λ-Treppenfunktion $0 \leq g \leq f$. Also

$$\int_* f\, d\lambda \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k\, d\lambda,$$

d.h. wir haben die Behauptung gemäß $\ \int_* f\, d\lambda \ = \ \int^* f d\lambda$, vgl. Satz 25.3 (1).

$\square$

Satz 25.6 : (monotone Konvergenz)

Sei $\{f_k\}$, $f_k : X \longrightarrow [0,\infty]$, *eine* **monoton wachsende** *Folge nicht-negativer* λ*-messbarer Funktionen. Dann gilt :*

$$\boxed{\int \lim_{k\to\infty} f_k \, d\lambda = \lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\lambda}$$

Bemerkungen :

1) $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ ist wegen der Monotonie punktweise erklärt, ≥ 0 und messbar
$\Longrightarrow \int f \, d\lambda$ existiert in $[0,\infty]$.

2) entsprechend : $f_k \geq g$ mit g λ-summierbar.

Beweis :

Für $j \in \mathbb{N}$ ist $f_j \leq f$

$$\Longrightarrow \int f_j \, d\lambda \leq \int f \, d\lambda$$

$$\Longrightarrow \limsup_{j\to\infty} \int f_j \, d\lambda \leq \int f \, d\lambda \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{j\to\infty} \int f_j \, d\lambda,$$

also existiert $\lim\limits_{j\to\infty} \int f_j \, d\lambda$ mit Wert $\int f \, d\lambda$.

□

Korollar: (durch Anwenden auf Partialsummen)

Sei $f_k : X \longrightarrow [0,\infty]$ λ-messbar. Dann gilt :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \, d\lambda = \int \underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \Big)}_{\substack{\text{p.w.Limes} \\ \text{in } [0,\infty]}} d\lambda,$$

speziell ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ λ-summierbar, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\int f_k \, d\lambda) < \infty$.

Satz 25.7 : (Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz)

Sei $g : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ λ-summierbar, also $\int |g|\, d\lambda < \infty$ (Satz 25.3 (7)).
f_k, f seien λ-messbare Funktionen $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $|f_k| \le |g|$ und $f_k \longrightarrow f$ λ-f.ü.
Dann gilt :

$$\lim_{k\to\infty} \int |f_k - f|\, d\lambda = 0 \qquad \left(\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \int f_k\, d\lambda = \int f\, d\lambda \right)$$

speziell ist

$\boldsymbol{f}$ **$\boldsymbol{\lambda}$-summierbar**.

Bemerkung:

Man nennt g aus offensichtlichen Gründen eine **summierbare Majorante**.

Beweis :

$|f_k| \le |g|$

$$\overset{\text{Satz 25.3 (4)}}{\Longrightarrow} \int |f_k|\, d\lambda \le \int |g|\, d\lambda < \infty \quad \text{und (Fatou)} \quad \int |f|\, d\lambda \le \liminf_{k\to\infty} \int |f_k|\, d\lambda \le \int |g|\, d\lambda$$

Alle auftretenden Funktionen sind λ-summierbar.
Sei $\varphi_k := 2 \cdot |g| - |f_k - f| \ge 0$ λ-f.ü.

$$\overset{\text{Fatou}}{\Longrightarrow} \liminf_{k\to\infty} \textstyle\int \varphi_k\, d\lambda \ge \int \liminf_{k\to\infty} \varphi_k\, d\lambda = \int 2\,|g|\, d\lambda.$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad 0 \quad &\le \quad \liminf_{k\to\infty} \textstyle\int (\varphi_k - 2\,|g|)\, d\lambda \\ &= \quad \liminf_{k\to\infty} \textstyle\int (-|f_k - f|)\, d\lambda \\ &= \quad -\limsup_{k\to\infty} \textstyle\int |f_k - f|\, d\lambda \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \limsup_{k\to\infty} \textstyle\int |f_k - f|\, d\lambda \quad \le \quad 0,$$

d.h.

$$\textstyle\int |f_k - f|\, d\lambda \longrightarrow 0.$$

Die 2^{te} Behauptung folgt aus

$$\left| \textstyle\int f_k\, d\lambda - \int f\, d\lambda \right| = \left| \textstyle\int (f_k - f)\, d\lambda \right| \overset{\text{S.25.3 (6)}}{\le} \textstyle\int |f_k - f|\, d\lambda$$

$\square$

Als $\to$ Übung überlege man sich folgende

Variante der dom. Konvergenz:

$g,\ g_k : X \longrightarrow [0, \infty]$ seien λ-summierbar; $f_k,\ f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ seien λ-messbar, und es gelte :

$$|f_k| \leq g_k,\ \ f_k \to f,\ \ g_k \to g \text{ f.ü. und } \int g_k \, d\lambda \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} \int g \, d\lambda.$$

Dann gilt :

$$\int |f_k - f| \, d\lambda \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Zum Abschluß fragen wir :

Welche Konvergenz $f_k \to f$ folgt aus $\int |f_k - f| \, d\lambda \to 0$?

Satz 25.8 :

Seien f_k, f λ-summierbar mit $\lim\limits_{k \to \infty} \int |f_k - f| \, d\lambda = 0$. Dann gilt $f_k \to f$ dem Maße nach, eine **Teilfolge** *$\{f_{n_\ell}\}$ konvergiert daher punktweise λ-f.ü. gegen f.*

[Die Folge selbst muß nicht f.ü. punktweise konvergent sein!]

Beweis :

Die letzte Aussage folgt aus der ersten mit dem Satz v. Riesz.

Setze $E_k(\delta) := \{x : |f_k(x) - f(x)| \geq \delta\}$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$.

Zu gegebenem $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$ wähle $k_\circ$ mit $\int |f_k - f| \, d\lambda < \delta \cdot \varepsilon$ für alle $k \geq k_\circ$.

Für $k \geq k_\circ$ folgt

$$\lambda(E_k(\delta)) = \frac{1}{\delta}(\delta \, \lambda(E_k(\delta))) \leq \frac{1}{\delta} \int_{E_k(\delta)} |f_k - f| \, d\lambda \leq \frac{1}{\delta} \int |f_k - f| \, d\lambda \leq \varepsilon,$$

d.h.

$$\forall \, k \geq k_\circ : \quad \lambda(E_k(\delta)) \leq \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k \to \infty} \lambda(E_k(\delta)) = 0.$$

Produkt-Maße / Satz Von Fubini

Motivation :

Volumen eines Körpers A in $\mathbb{R}^n = \mathcal{L}^n(A) = \int \chi_A \, d\mathcal{L}^n$.
Berechnen können wir aber nur $\int_a^b f(x)\,dx$. D.h.: Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\int f(x_a, \ldots, x_n)\, d\mathcal{L}^n(x)$ und den iterierten Mehrfachintegralen $\int (\ldots (\int f(x_1 \ldots x_n)\, dx_1) \ldots)\, dx_n$, wo sukzessive ausintegriert wird?

Definition 25.4 : Produktmaß

Seien λ und ρ Maße auf X bzw. Y. Das Produktmaß $\lambda \times \rho$ ist ein Maß auf $X \times Y$, das durch

$$\boxed{\begin{array}{l}(\lambda \times \rho)(C) := \inf\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)\,\rho(B_i) : C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i, \\ \textit{mit beliebigen Mengen } A_i \subset X,\ B_i \subset Y\},\ C \subset X \times Y\end{array}}$$

festgelegt wird. Dabei vereinbart man für die Summanden $0 \cdot \infty = 0$,

wenn $\lambda(A_i) = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}$ *und* $\rho(B_i) = \begin{cases} 0 \\ \infty. \end{cases}$

Satz 25.9 :

$\lambda \times \rho$ ist ein Maß auf $X \times Y$.

Beweis : $\rightarrow$ Übung ! (vgl. die Überlegung für $\mathcal{L}^n$)

Aus der Definition folgt sofort

$$\boxed{(\lambda \times \rho)(A \times B) \;\leq\; \lambda(A)\rho(B)} \qquad (*)$$

für alle $A \subset X$, $B \subset Y$, und man kann zeigen :

$\boldsymbol{\lambda \times \rho}$ ist das Supremum aller Maße $\boldsymbol{\mu}$ auf $\boldsymbol{X \times Y}$ mit $(*)$.

In $(*)$ gilt i.a. „$<$“, wir geben gleich Bedingungen für λ, ρ, A, B, wann „$=$“ eintritt.

Satz 25.10 :

Für das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ gilt

$$\boxed{\mathcal{L}^{n+m} \;=\; \mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m}\ .$$

Korollar :

$$\boxed{\text{Auf } \mathbb{R}^n \text{ ist } \mathcal{L}^n = \underbrace{\mathcal{L}^1 \times \ldots \times \mathcal{L}^1}_{n-\text{mal}} \,.}$$

Bemerkung:

Das n-fache Produkt $\lambda_1 \times \ldots \times \lambda_n$ von Maßen λ_i auf X_i wird induktiv erklärt. Man überlegt sich leicht, dass diese Bildung **assoziativ** ist, d.h. man braucht keine Klammern setzen!

Beweis von Satz 25.10 :

Es ist zunächst

$$(1) \quad \mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m \leq \mathcal{L}^{n+m},$$

denn : $\quad \forall\, C \subset \mathbb{R}^{n+m}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{n+m}(C) \quad &:= \quad \inf\big\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^{n+m}(Q_i) : Q_i = Q_i^{(n)} \times Q_i^{(m)} \subset \mathbb{R}^{n+m} \text{ mit } \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \supset C\big\}\\
&= \quad \inf\big\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i^{(n)}) \cdot \mathcal{L}^m(Q_i^{(m)} : \ldots\big\}\\
&\geq \quad \inf\big\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_i) \cdot \mathcal{L}^m(B_i) : A_i \subset \mathbb{R}^n,\ B_i \subset \mathbb{R}^m \text{ mit } \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i) \supset C\big\}
\end{aligned}$$

(da rechts von “$\geq$” das inf über eine größere Menge von Zahlen gebildet wird).

Man beachte weiter die Gültigkeit von

$$(2) \quad \mathcal{L}^{n+m}(A \times B) \leq \mathcal{L}^n(A) \cdot \mathcal{L}^m(B), \quad \forall\, A \subset \mathbb{R}^n,\ B \subset \mathbb{R}^m.$$

Mit anderen Worten : Das Maß $\mathcal{L}^{n+m}$ hat die Eigenschaft $(*)$. $\mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m$ ist aber das größte Maß dieser Art, d.h. $\mathcal{L}^{n+m} \leq \mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m$. Mit (1) folgt die Behauptung.

ad (2) : Sei $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, $B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{Q}_j$ mit Quadern $Q_i \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{Q}_j \subset \mathbb{R}^m$, wobei

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \leq \varepsilon + \mathcal{L}^n(A)\ ,\ \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^m(\tilde{Q}_j) \leq \varepsilon + \mathcal{L}^m(B) \text{ mit gegebenem } \varepsilon > 0.$$

Es ist $A \times B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_i \times \tilde{Q}_j$, also :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{n+m}(A \times B) \quad &\leq \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \mathcal{L}^m(\tilde{Q}_j) = \big(\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i)\big) \cdot \big(\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^m(\tilde{Q}_j)\big)\\
&\leq \quad \mathcal{L}^n(A) \cdot \mathcal{L}^m(B) + \varepsilon\big[\mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^m(B)\big] + \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Da man O.E. $\mathcal{L}^n(A)$, $\mathcal{L}^m(B) < \infty$ annehmen darf, folgt (2) mit $\varepsilon \downarrow 0$.

$\square$

Bemerkung:

Alternativ kann man zeigen, dass $\mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^m$ die Voraussetzungen des Eindeutigkeitssatzes für das Maß $\mathcal{L}^{n+m}$ auf $\mathbb{R}^{n+m}$ erfüllt, also $= \mathcal{L}^{n+m}$ sein muss.

Die Volumenberechnung durch Schnitte bzw. die Berechnung von Integralen durch iterierte Mehrfachintegrale geht nun mit folgendem Satz.

Satz 25.11 : (Satz von Fubini)

Seien λ und ρ Maße auf X bzw. Y. Dann gilt :

(i) $\lambda \times \rho$ *ist ein* **reguläres Maß**, *d.h. zu* $C \subset X \times Y$ *existiert eine* $\boldsymbol{\lambda \times \rho}$**-messbare, maßgleiche** *Obermenge* $\tilde{C}$. *Dies gilt auch wenn* λ, ρ **selbst nicht** *regulär sind.*

(ii) $A \subset X$ *λ-messbar,* $B \subset Y$ *ρ-messbar* $\Longrightarrow A \times B$ *ist* $\lambda \times \rho$*-messbar mit*

$$(\lambda \times \rho)(A \times B) = \lambda(A)\,\rho(B)$$

(macht den Beweis des vorigen Satzes komplett).

(iii) Sei $S \subset X \times Y$ $\boldsymbol{\sigma}$**-endlich** *bzgl.* $\boldsymbol{\lambda \times \rho}$, *d.h. es gibt* $\boldsymbol{\lambda \times \rho}$**-messbare** *Mengen* S_k *mit* $(\lambda \times \rho)(S_k) < \infty$ *und* $S = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} S_k$. *Dann gilt :*

Die **Schnitte**

$$\begin{aligned} S_y &:= \{x \in X : (x,y) \in S\} \subset X, \quad y \in Y, \\ S_x &:= \{y \in Y : (x,y) \in S\} \subset Y, \quad x \in X, \end{aligned}$$

sind λ- bzw. ρ-messbar für ρ-f.a. y bzw. λ-f.a. x.

Y

S_x S

x X

Die Funktion $y \longmapsto \lambda(S_y)$ *ist* $\boldsymbol{\rho}$**-integrierbar**,
die Funktion $x \longmapsto \rho(S_x)$ *ist* $\boldsymbol{\lambda}$**-integrierbar** *mit*

$$\boxed{(\lambda \times \rho)(S) = \int\limits_X \rho(S_x)\, d\lambda(x) = \int\limits_Y \lambda(S_y)\, d\rho(y).}$$

Man erhält also das Volumen von S bzgl. des Produktmaßes $\lambda \times \rho$ durch Aufintegration der Schnittflächen, wobei es keine Rolle spielt, bzgl. welcher Richtung man die Schnitte bildet.

(iv) Ist $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar bzgl. $\lambda \times \rho$, und ist $\{(x,y) : f(x,y) \neq 0\}$ **$\boldsymbol{\sigma}$-endlich** *bzgl. $\lambda \times \rho$ (z.B. wenn f summierbar), so gilt*

$$y \longmapsto \int_X f(x,y)\, d\lambda(x) \ \textit{ist } \rho\textit{-integrierbar},$$
$$x \longmapsto \int_Y f(x,y)\, d\rho(y) \ \textit{ist } \lambda\textit{-integrierbar},$$

mit

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\lambda\times\rho)(x,y) &= \int_X \Big(\int_Y f(x,y)\, d\rho(y)\Big)\, d\lambda(x) \\ &= \int_Y \Big(\int_X f(x,y)\, d\lambda(x)\Big)\, d\rho(y).\end{aligned}}$$

„schrittweise Integration"

Beweis :

$\rightarrow$ Literatur, z.B.: Federer, 2.6.2, p.115f.

$\square$

Bemerkungen und Beispiele :

(1) „σ-Endlichkeit" in (iii), (iv) ist nötig, sonst gelten die beiden Formeln nicht :

$$X = Y = \mathbb{R},\ \lambda = \mathcal{L}^1,\ \rho = \text{Zählmaß},\ S = \{(x,x) : 0 \leq x \leq 1\} \text{ und } f = \chi_S.$$

$\mathcal{L}^1$ und ρ sind Borel-regulär
$\Longrightarrow \mathcal{L}^1 \times \rho$ ist Borel-regulär, d.h. die Borel-Menge S ist $\mathcal{L}^1 \times \rho$-messbar;
gemäß $f = \chi_S \geq 0$ folgt Integrierbarkeit von f bzgl. $\mathcal{L}^1 \times \rho$.
Aber :

$$\begin{aligned} & \int \Big(\int f(x,y)\, d\mathcal{L}^1(x)\Big)\, d\rho(y) &&= \int \Big(\int \chi_S(x,y)\, d\mathcal{L}^1(x)\Big)\, d\rho(y) \\ = & \int \mathcal{L}^1\big(\{x : (x,y) \in S\}\big)\, d\rho(y) &&= \int \mathcal{L}^1(\{y\})\, d\rho(y) \\ = & \ 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int \Big(\int f(x,y)\, d\rho(y)\Big)\, d\mathcal{L}^1(x) &&= \int \Big(\int \chi_S(x,y)\, d\rho(y)\Big)\, d\mathcal{L}^1(x) \\ = & \int \rho\big(\{y : (x,y) \in S\}\big)\, d\mathcal{L}^1(x) &&= \int_{[0,1]} \rho(\{x\})\, d\mathcal{L}^1(x) \\ = & \int_{[0,1]} 1 \cdot d\mathcal{L}^1(x) = 1. \end{aligned}$$

Also ist S nicht σ-endlich bzgl. $\mathcal{L}^1 \times \rho$, d.h. wir bekommen insbesondere

$$(\mathcal{L}^1 \times \rho)(S) = \infty \quad \text{ und auch } \quad \int f(x,y)\, d(\mathcal{L}^1 \times \rho) = \infty,$$

denn andernfalls wäre ja $\{(x,y) : f(x,y) \neq 0\}$ σ-endlich.

(warum ? $\quad \big[f>0\big] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \big[f > \frac{1}{n}\big]$, Maß von $\big[f > \frac{1}{n}\big] \leq n \cdot \int f \, d(\mathcal{L}^1 \times \rho) < \infty$)

(2) **Volumen des Katagraphen :**

$\mathbb{R}$

Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-messbar,

$f : A \longrightarrow [0,\infty]$ $\mathcal{L}^n$-messbar.

A $\quad\quad$ $\mathbb{R}^n$

Setze $K_f := \big\{(x,y) \in A \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\big\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{n+1}(K_f) &\overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_A \mathcal{L}^1\big(\{t \in \mathbb{R} : (x,t) \in K_f\}\big)\, d\mathcal{L}^n(x) \\
&= \int\limits_A \mathcal{L}^1\big(\{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(x)\}\big)\, d\mathcal{L}^n(x) \\
&= \int\limits_A f(x)\, d\mathcal{L}^n(x).
\end{aligned}$$

Wendet man Fubini auf die Schnitte in t-Richtung an, so folgt :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{n+1}(K_f) &= \int \mathcal{L}^n\big(\{x \in A : (x,t) \in K_f\}\big)\, d\mathcal{L}^1(t) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_\circ^+} \mathcal{L}^n\big(\{x \in A :\ t \leq f(x)\}\big)\, d\mathcal{L}^1(t) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_\circ^+} \mathcal{L}^n\big(f^{-1}[t,\infty]\big)\, d\mathcal{L}^1(t).
\end{aligned}$$

konkret :

(i) $\int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-\max\{|x|^3,\,|y|^3,\,|z|^3\}}\, d\mathcal{L}^3(x,y,z) = \,?$

Sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \exp\big(-\max\{|x|^3,\ |y|^3,\ |z|^3\}\big)$.

f ist stetig $\Longrightarrow$ f $\mathcal{L}^3$-messbar; außerdem: $f \geq 0$.

Deshalb :

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\, d\,\mathcal{L}^3(x,y,z) = \mathcal{L}^4(K_f) \overset{\text{andere Formel}}{=} \int\limits_0^\infty \mathcal{L}^3\big(f^{-1}([t,\infty))\big)\, d\mathcal{L}^1(t).$$

Für $t > 0$ ist

$$f^{-1}([t,\infty)) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|,\ |y|,\ |z|\} \leq \sqrt[3]{\ln 1/t}\big\},$$

wobei wir $t \leq 1$ annehmen dürfen, da stets $f \leq 1$.

Also ist $f^{-1}([t,\infty))$ ein Würfel mit Kantenlänge $2\,\sqrt[3]{\ln 1/t}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-\max\{|x|^3,\,|y|^3,\,|z|^3\}}\, d\mathcal{L}^3(x,y,z) &= \textstyle\int_0^1 \big(2\,\sqrt[3]{\ln 1/t}\big)^3\, dt \\
&= \textstyle\int_0^1 8\, \ln 1/t\, dt \\
&= -8 \textstyle\int_0^1 \ln t\, dt \\
&= -8\big[t \cdot \ln t - t\big]_0^1 = 8.
\end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass man die Katagraphenformel auch zur Berechnung von iterierten Integralen benutzen kann. Die Formel aus Satz 25.11(iv) führt wohl nicht(?) so direkt zum gewünschten Ergebnis.

(ii) $\int\limits_{[0,1]^2} (x^2+xy)\, d\mathcal{L}^2(x,y) = ?$

Alle Voraussetzungen von (iv) des Satzes erfüllt

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \int\limits_{[0,1]^2} (x^2+xy)\, d\mathcal{L}^2(x,y) &= \textstyle\int_0^1 \big(\int_0^1 (x^2+xy)\, d\mathcal{L}^1(x)\big)\, d\mathcal{L}^1(y)\\
&= \textstyle\int_0^1 \big(\int_0^1 (x^2+xy)\, dx\big)\, dy\\
&= \textstyle\int_0^1 \big(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}y\big)\, dy\\
&= \textstyle\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12},
\end{aligned}$$

wobei wir die $\mathcal{L}^1$-Integrale standardmäßig ausrechnen dürfen.

iii)

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}} \big(1-\sqrt{x^2+y^2}\big)\, d\mathcal{L}^2(x,y)\\
\overset{\text{Katagraphenformel}}{=}\ & \mathcal{L}^3\big(\{(x,y,z) : x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 1-\sqrt{x^2+y^2}\}\big)\\
\overset{\text{Katagraphenformel}}{=}\ & \textstyle\int_0^1 \mathcal{L}^2\big(\{(x,y) : 1-\sqrt{x^2+y^2}\le t\}\big)\, dt\\
=\ & \textstyle\int_0^1 \mathcal{L}^2\big(B_{1-t}(0,0)\big)\, dt\\
=\ & \textstyle\omega_2 \int_0^1 (1-t)^2\, dt \quad \text{mit } \omega_2 := \mathcal{L}^2(B_1(0,0)) =?
\end{aligned}$$

Zur Berechnung von ω_2 benutzt man die Katagraphenformel

$$f(t) := \sqrt{1-t^2} \quad \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}^2(\quad) = \textstyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\, dt,$$

-1 1

also

$$\omega_2 = 2\cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \pi.$$

Einsetzen ergibt :

$$\int\limits_{\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}} (1-\sqrt{x^2+y^2})\, d\mathcal{L}^2(x,y) = \pi/3.$$

$\square$

Die Transformationsformel

Diese Formel verallgemeinert die **Substitutionsregel für eindimensionale Integrale** und gestattet manchmal die Reduktion komplizierter Mehrfachintegrale auf einfachere Ausdrücke.

Situation :

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : U \longrightarrow \Phi(U)$ sei ein **Diffeomorphismus** der Klasse C^1.

Problem :

Welche Beziehung besteht zwischen $\mathcal{L}^n(A)$ und $\mathcal{L}^n(\Phi(A))$ für $A \subset U$?

Allgemeiner :

Umrechnung von $\int\limits_{\Phi(A)} g\, d\mathcal{L}^n$ in ein Integral über A!

Für $g := X_{\Phi(A)}$ hat man den ursprünglichen Fall.

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-messbar, dann ist bekannt :

Φ **linearer** Isomorphismus $\overset{\text{S.23.9(iv)}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{L}^n(\Phi(A) = |\det \Phi|\, \mathcal{L}^n(A)$.

Sei nun Φ C^1-Diffeomorphismus $U \longrightarrow \Phi(U)$ und $A \subset U$.

Man zerlegt A in kleine Stücke A_i, so dass

$$\begin{cases} \mathcal{L}^n(A) & \approx & \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_i), \\ \mathcal{L}^n(\Phi(A)) & \approx & \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\Phi(A_i)), \\ \Phi(x) & \approx & \underbrace{D\Phi(a_i)(x - a_i) + \Phi(a_i)}_{=: T_i(x)} \text{ auf } A_i, \end{cases}$$

wobei $a_i \in A_i$. Dann ist

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A_i)) \approx \mathcal{L}^n(T_i(A_i)) = \mathcal{L}^n(D\Phi(a_i)(A_i)) \overset{\text{s.o.}}{=} |\det D\Phi(a_i)| \cdot \mathcal{L}^n(A_i)$$

denn T_i und $D\Phi(a_i)$ unterscheiden sich nur um Translationen. Es folgt :

$$\mathcal{L}^n(\Phi(A) \approx \sum_{i=1}^{\infty} |\det D\Phi(a_i)|\, \mathcal{L}^n(A_i).$$

Da $D\Phi$ stetig ist, gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\det D\Phi(a_i)|\, \mathcal{L}^n(A_i) \longrightarrow \int\limits_A |\det D\Phi|\, d\mathcal{L}^n$$

bei zunehmender Verfeinerung der Zerlegung A_i. Indem man alle Schritte präzise ausführt, folgt

Satz 25.12 : (Transformationsformel für $\mathcal{L}^n$-Integral)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \longrightarrow \Phi(U)$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann gilt :

(i) $A \subset U$ *messbar* $\Longleftrightarrow \Phi(A)$ *messbar*

(ii) $\boxed{A \subset U \text{ messbar} \Longrightarrow \mathcal{L}^n(\Phi(A)) = \int\limits_A |\det D\Phi| \, d\mathcal{L}^n.}$

(iii) $g : \Phi(U) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *messbar* $\Longleftrightarrow g \circ \Phi : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *messbar*

$\Longleftrightarrow (g \circ \Phi) \cdot |\det D\Phi| : U \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *messbar.*

(iv) $\boxed{\begin{array}{l} A \subset U \text{ messbar, } g : \Phi(U) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar} \\ \Longrightarrow \int\limits_{\Phi(A)} g \, d\mathcal{L}^n = \int\limits_A g \circ \Phi |\det D\Phi| \, d\mathcal{L}^n, \end{array}}$

wobei: keins der Integrale existiert oder beide existieren in $\overline{\mathbb{R}}$ und sind gleich.

Bemerkung zum Beweis : Die Meßbarkeitsaussagen sind trivial.

(iv) folgt aus (ii), indem man $g \geq 0$ annimmt (es existieren beide Integrale in $[0, \infty]$) und dann (vgl. Satz 24.2) schreibt $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{B_k}$, $B_k \subset \Phi(U)$ messbar. Mit

$$\chi_{B_k} \circ \Phi = \chi_{\Phi^{-1}(B_k)} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (\chi_{B_k} \circ \Phi) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{B_k} \right) \circ \Phi$$

folgt :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Phi(A)} g \, d\mathcal{L}^n \quad &= \int\limits_{\Phi(U)} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \chi_{B_k} \cdot \chi_{\Phi(A)} \, d\mathcal{L}^n \\
&\overset{\substack{\text{monotone} \\ \text{Konvergenz}}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \int\limits_{\Phi(U)} \chi_{B_k} \cdot \chi_{\Phi(A)} \, d\mathcal{L}^n \\
&\overset{B_k \subset \Phi(U)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \mathcal{L}^n(B_k \cap \Phi(A)) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \int\limits_{\Phi^{-1}(B_k) \cap A} |\det D\Phi| \, d\mathcal{L}^n \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \int\limits_A \chi_{B_k} \circ \Phi \, |\det D\Phi| \, d\mathcal{L}^n \\
&\overset{\substack{\text{monotone} \\ \text{Konvergenz}}}{=} \int\limits_A \Big(\sum_{k-1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \chi_{B_k} \circ \Phi \Big) \, |\det D\Phi| \, d\mathcal{L}^n \\
&= \int\limits_A g \circ \Phi |\det D\Phi| \, d\mathcal{L}^n
\end{aligned}$$

□

Bemerkung und Beispiele :

(1) Im **Spezialfall $\boldsymbol{n = 1}$** erhält man die **Substitutionsregel** :

Sei $f : I \longrightarrow J$ C^1 mit $f' \neq 0$ überall auf dem offenen Intervall I. J sei das Bild von f. Sei $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ **stetig** und $[c, d] \subset J$. Dann gilt nach der Transformationsregel

$$\int_c^d g(y)\, dy = \int\limits_{[c,d]} g\, d\mathcal{L}^1 = \int\limits_{f^{-1}([c,d])} (g \circ f) \cdot |f'|\, d\mathcal{L}^1.$$

Es ist $f^{-1}([c, d]) =: [a, b] \subset I$.

<u>**Fall 1:**</u> $f' > 0$

$$\Longrightarrow \quad f(a) = c,\ f(b) = d$$

$$\Longrightarrow \quad \int\limits_c^d g(y)\, dy = \int\limits_{[a,b]} g \circ f \cdot f'\, d\mathcal{L}^1 = \int\limits_a^b g \circ f \cdot f'\, dx \; = \int\limits_{f^{-1}(c)}^{f^{-1}(d)} g \circ f \cdot f'\, dx$$

<u>**Fall 2:**</u> $f' < 0$

$$\Longrightarrow \quad f(a) = d,\ f(b) = c$$

$$\Longrightarrow \quad \int\limits_c^d g(y)\, dy = -\int\limits_{[a,b]} g \circ f \cdot f'\, d\mathcal{L}^1 = -\int\limits_a^b g \circ f \cdot f'\, dx = \int\limits_{f^{-1}(c)}^{f^{-1}(d)} g \circ f \cdot f'\, dx$$

(2) **Verallgemeinerungen :**

I. $\boxed{\text{Ist } \Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ U \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, injektiv und von der Klasse } C^1, \text{ so gelten alle Aussagen von 25.12.}}$

Hinweis: man benutzt den **Satz von Sard :**

Für eine C^1-Funktion $\Psi : \mathbb{R}^n \supset U \longrightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\mathcal{L}^n\big(\{\Psi(x) : \det D\Psi(x) = 0\}\big) = 0.$$

II. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lediglich C^1.

(i) Für $\boldsymbol{A \subset U}$**messbar** ist auch $\boldsymbol{\Phi(A)}$**messbar**.

Die **Vielfachheitenfunktion**

$$\mathbb{R}^n \ni y \longmapsto \#\{x \in A : \Phi(x) = y\} =: V(\Phi|_A, y)$$

ist ebenfalls messbar, und es gilt :

$$\boxed{\int V\big(\Phi|_A, \cdot\big)\, d\mathcal{L}^n = \int\limits_A |\det D\Phi|\, d\mathcal{L}^n.}$$

(ii) Ist $A \subset U$ messbar, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar, so ist $g \circ \Phi \,|\det D\Phi|$ messbar, und es gilt

$$\boxed{\int g \cdot V\big(\Phi|_A, \cdot\big)\, d\mathcal{L}^n = \int_A g \circ \Phi \,|\det D\Phi|\, d\mathcal{L}^n.}$$

Hier existieren entweder beide Integrale und sind gleich oder keines existiert.

Offenbar folgt I. aus II., da dann $V\big(\Phi|_A, \cdot\big) = \chi_{\Phi(A)}$.

(3) Sei $f : [0, \infty) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{L}^1$-integrierbar. Dann gilt :

$$\begin{aligned} & \int_{R_1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le R_2} f\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\, d\mathcal{L}^2(x,y) \\ = \;& 2\pi \int_{[R_1,R_2]} f(t) \cdot t\, d\mathcal{L}^1(t) \\ = \;& 2\pi \int_{R_1}^{R_2} f(t) \cdot t \cdot dt, \quad 0 \le R_1 < R_2 < \infty \end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen korrekt ist, wenn $\boldsymbol{f}$ **auf jedem Intervall** $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}]$**eine Regelfunktion ist**.

Beweis :

$\Phi(r, \varphi) = (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)$ Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & \int_{\{(x,y): R_1 \le |(x,y)| \le R_2\}} f\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\, d\mathcal{L}^2(x,y) \\ = \quad & \int_{\Phi([R_1,R_2]\times[0,2\pi])} \ldots \\ = \quad & \int_{[R_1,R_2]\times[0,2\pi]} f\big(\Phi(r,\varphi)\big)\ |\det D\Phi|\, d\mathcal{L}^2(r,\varphi) \\ = \quad & \int_{[R_1,R_2]\times[0,2\pi]} f(r) \cdot r\, d\mathcal{L}^2(r,\varphi) \\ \overset{\text{Fubini}}{=} \quad & 2\pi \int_{[R_1,R_2]} f(r) \cdot r\, d\mathcal{L}^1(r). \end{aligned}$$

Damit läßt sich zeigen :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}}$$

denn :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d\,\mathcal{L}^2(x,y) && \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, d\mathcal{L}^1(x)\Big)\, d\mathcal{L}^1(y) \\ = \quad & \int_{-\infty}^{\infty} e^{y^2} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, d\mathcal{L}^1(x)\Big)\, d\mathcal{L}^1(y) && = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, d\mathcal{L}^1(t)\Big)^2 \\ \overset{\text{Begründung}}{=} \quad & \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt\Big)^2. \end{aligned}$$

Andererseits

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d\mathcal{L}^2(x,y) \overset{\text{Formel v. vorhin}}{=} 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2}\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \left(-\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dr} e^{-r^2}\right) dr = \pi$$

$$\Longrightarrow \quad \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt\Big)^2 = \pi$$

□

Weitere Anwendungen der Transformationsformel für $\mathcal{L}^n$

(4) Räumliche Polarkoordinaten

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) := (r\cos\vartheta\cos\varphi, r\cos\vartheta\sin\varphi, r\sin\vartheta) \text{ auf } (0,\infty)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times(0,2\pi).$$

Φ ist ein Diffeomorphismus mit Bild $\Phi = \mathbb{R}^3 - \underbrace{(-\infty,0]\times\{0\}\times\mathbb{R}}_{\mathcal{L}^3\text{-Nullmenge!}}, |\det D\Phi| = \mathbb{R}^2\cdot\cos\vartheta.$

Beispiel :

Volumen der Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius R

$$\mathcal{L}^3(B_R) = \int_{(0,R)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times(0,2\pi)} r^2\cos\vartheta\, d\mathcal{L}^3(r,\vartheta,\varphi)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} 2\pi\left(\int_0^R r^2\, dr\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos\vartheta\right) = \tfrac{4}{3}\pi\mathbb{R}^3.$$

Wie in (3) kann man sich überlegen

$$\int_{R_1\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}\le\mathbb{R}_2} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) d\mathcal{L}^3(x,y,z) = 4\pi\int_{R_1}^{R_2} r^2 f(r)\, dr,$$

und im $\mathbb{R}^n$ gilt :

$$\int_{R_1\le|x|\le R_2} f(|x|)\, d\mathcal{L}^n(x) = n\cdot\omega_n\int_{R_1}^{R_2} r^{n-1} f(r)\, dr$$

für $\mathcal{L}^1$-integrierbare $f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ (genauer: f **Regelfunktion** auf jedem Intervall $[R_1,R_2]$). Für die letzte Formel muß man Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^n$ einführen.

Ergänzungen

Bis jetzt können wir nur das Volumen $\mathcal{L}^n(K)$ von „Körpern" $K \subset \mathbb{R}^n$ vernünftig messen, niederdimensionale Mengen werden nicht berücksichtigt, denn Untermannigfaltigkeiten der Dimension $< n$ sind automatisch $\mathcal{L}^n$-Nullmengen. Wir benötigen deshalb niederdimensionale geometrische Maße.

Definition 25.5 : Hausdorff-Maße

Sei $0 \le s < \infty$, $\alpha(s) := \begin{cases} \omega_s & , \quad s \in \mathbb{N} \\ \textit{beliebig} > 0 & , \quad \textit{sonst} \end{cases}$

a) Für $0 < \delta \le \infty$ *sei* $(A \subset \mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam} A_i}{2} \right)^s : \begin{array}{c} (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ beliebige Überdeckung von } A \\ \text{mit Mengen } A_i \text{ wobei } \operatorname{diam} A_i \le \delta \end{array} \right\}$$

b) Für $A \subset \mathbb{R}^n$ *sei (s-dim. Hausdorff-Maß)*

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Eigenschaften :

(1) $\mathcal{H}^s_\delta$, $\mathcal{H}^s$ sind Maße auf $\mathbb{R}^n$

(2) $\delta \longmapsto \mathcal{H}^s_\delta(A)$ ist monoton fallend $\quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$ existiert

(3) A beschränkt $\quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}^s_\delta(A) < \infty$ für alle $\delta > 0$
(aber $\mathcal{H}^s_\delta(A)$ kann i.a. nicht unabhängig von δ beschränkt werden)

(4) $\operatorname{dist}(A, B) > 2\delta \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) = \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)$

$\Rightarrow$(5) $\operatorname{dist}(A, B) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$
D.h.: **$\boldsymbol{\mathcal{H}^s}$ ist Borel-Maß auf $\boldsymbol{\mathbb{R}^n}$.**

(6) $\boxed{\mathcal{L}^n = \mathcal{H}^n = \mathcal{H}^n_\delta \text{ auf } \mathbb{R}^n \text{ für jedes } \delta > 0}$

(7) $\mathcal{H}^s$ ist **homogen vom Grad $\boldsymbol{s}$** und invariant unter Isometrien von $\mathbb{R}^n$.

(8) $\mathcal{H}^\circ$ ist das Zählmaß.

(9) Für $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(A) < \infty \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{H}^t(A) = 0 \text{ für alle } t > s \\ \mathcal{H}^s(A) > 0 \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{H}^t(A) = \infty \text{ für alle } t < s. \end{aligned}$$

(10) $A \subset \ell$-dim. Hyperebene, A beschränkt $\quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}^\ell(A) < \infty$

(11) U offen $\subset \mathbb{R}^m$, $m < n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ regulär $\quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}^m(f(K)) < \infty \; \forall \, K$ kompakt $\subset U$

Bemerkung :

(9) - (11) zeigen, dass $\mathcal{H}^\ell$ das richtige Maß zur Messung $\ell -$ dim Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist.

Lemma :

Sei $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ linear mit $\boldsymbol{n \leq N}$. Sei

$$[\![L]\!] := \det(L^T \circ L)^{1/2} \quad \text{(genannt die } \textbf{Jacobische von } \boldsymbol{L}\text{)}$$

Dann gilt für $A \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{H}^n(L(A)) = [\![L]\!] \cdot \mathcal{L}^n(A)$$

Bemerkung :

(1) ,,Lineare Algebra": $\quad [\![L]\!] = \sqrt{\substack{\text{Summe der Quadrate aller} \\ n \times n \text{ Unterdet. von } L}}$!

(2) Es ist $L^t \circ L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\langle L^t \circ Lv, v\rangle = \langle Lv, Lv\rangle \geq 0$$

$\Longrightarrow \quad \det(L^t \circ L) \geq 0$, so dass $[\![L]\!]$ definiert ist.

Mit dem Lemma und Approximation beweist man

Satz 25.13 : Flächenformel

Seien $\boldsymbol{n < N}$ *und* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen sowie* $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ C^1. *Dann gilt für alle* $\mathcal{L}^n$*-messbaren* $A \subset U$

$$\int\limits_A [\![D\Phi]\!] \, d\mathcal{L}^n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} V(\Phi|_A, \cdot) \, d\mathcal{H}^n(y).$$

Ist Φ **injektiv**, *so folgt :*

a) $\boxed{\mathcal{H}^n\big(\Phi(A)\big) = \int\limits_A [\![D\Phi]\!] \, d\mathcal{L}^n}$

b) **(Berechnung von Flächenintegralen)**

$$\int\limits_{\Phi(A)} g \, d\mathcal{H}^n = \int\limits_A g \circ \Phi \, [\![D\Phi]\!] \, d\mathcal{L}^n$$

für $\mathcal{H}^n$*-messbare* $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *(z.B. Borel* g*), wobei entweder keins der Integrale existiert oder aber beide Integrale existieren und gleich sind.*

Beispiele :

(1) **Kurven von $\mathbb{R}^\ell$:**
$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ injektive C^1-Kurve;

$$[\![\gamma'(t)]\!] = |\gamma'(t)| \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}^1\big(\gamma([a,b)\big) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \quad \text{(Kurvenlänge)}$$

(2) **Graphen in $\mathbb{R}^{n+1}$:**
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $M := \{(x, f(x)) : x \in \Omega\}$ ist n-dim. Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$; mit $F(x) := (x, f(x))$ ist

$$[\![DF(x)]\!] = \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} \qquad \begin{pmatrix} \text{folgt leicht aus der anderen Darstellung} \\ \text{von } [\![DF(x)]\!] \text{ für } n = 2,\, 3 \text{ direkt prüfbar} \end{pmatrix}.$$

Also :

$$\mathcal{H}^n(M) = \int\limits_\Omega \sqrt{1 + \nabla f|^2}\, d\mathcal{L}^n(x).$$

Zum Schluß eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes, der

Satz 25.14 : (Satz von Gauß)

$G \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und beschränkt, ∂G sei eine $(n-1)$-dim. Mannigfaltigkeit, $\mathcal{N}(x) \in (T_x\partial G)^\perp$ sei der äußere Normalenvektor ($|\mathcal{N}| = 1$).
Ist $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ für $U \supset \overline{G}$ offen, so gilt

$$\boxed{\int\limits_G \operatorname{div} F\, d\mathcal{L}^n = \int\limits_{\partial G} \langle F, \mathcal{N}\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}}$$

und der

Satz 25.15 : Satz von Stokes

Seien eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ mit Rand ∂M und ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben.
($\mathcal{N}$=Normalfeld zu M, T=„richtig orientierter" Tangentenvektor an die Kurve ∂M)

$$\boxed{\int\limits_M \operatorname{rot} F \cdot \mathcal{N}\, d\mathcal{H}^2 = \int\limits_{\partial M} F \cdot T\, d\mathcal{H}^1}$$

26

Vektoranalysis - Kurvenintegrale von Vektorfeldern und 1-Formen

Typische Frage: Wann ist ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ konservativ, d.h. $F = \nabla f$?

Definition 26.1 : (1-Form)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $(\mathbb{R}^n)^*$ sei der Dualraum von $\mathbb{R}^n$.
Eine **1-Form** *auf U ist eine stetige Abbildung $\varphi : U \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$.*
(Andere Sprechweise: 1-Form ist **Differentialform vom Grad 1)**

Darstellung von 1-Formen

$$\begin{aligned} e_1, \ldots, e_n &= \text{Standardbasis voni } \mathbb{R}^n \\ e^1, \ldots, e^n &= \text{duale Basis, d.h.} \end{aligned}$$

$e^i \in (\mathbb{R}^n)^*$ wird definiert durch $e^i(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Sei $\varphi : U \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ eine 1-Form $\quad \Longrightarrow \quad \varphi(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$ für jedes $x \quad \Longrightarrow$

$$\boxed{\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e^i}$$

mit **eindeutig bestimmten (stetigen) Koeffizientenfunktionen** $\varphi_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$.
Beachte :

per Def. ist eine 1-Form φ an jeder Stelle $x \in U$ eine **lineare** Abbildung $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, wirkt also auf Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$:$\boldsymbol{\varphi(x)(v)}$ **ist linear in** $\boldsymbol{v}$.

Notation :

dx^i ist die **konstante** 1-Form, $dx^i(x) \equiv e^i \; \forall\, x \in \mathbb{R}^n$
(in $\mathbb{R}^2$: dx, dy, in $\mathbb{R}^3$: dx, dy, dz, statt dx^1, dx^2 bzw. dx^1, dx^2, dx^3)
für eine beliebige 1-Form φ gilt deshalb

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \, dx^i.$$

Beispiele :

(1) **„Differentiale":** $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sei C^1 $\Longrightarrow$ Df ist 1-Form, da $Df(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ linear per Definition der Ableitung

Schreibweise : df statt Df

Es gilt :

$$df(x)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{df = \sum_{i=1}^n \tfrac{\partial f}{\partial x_i} \; dx^i}$$ „äußere Ableitung"

konkret :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x \cdot \sin y \\ df(x,y) &= \sin y \, dx + x \cdot \cos y \, dy \end{aligned}$$

(2) **Vektorfelder:** $F = (F_1, \ldots, F_n) : U \xrightarrow{C^\circ} \mathbb{R}^n$
ordne F die 1-Form

$$\boxed{\varphi_F : U \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*, \; \varphi_F = \sum_{i=1}^n F_i \, dx^i}$$

zu; umgekehrt gehört zu

$$\Psi : U \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$$

das Vektorfeld

$$G = (\Psi_1, \ldots, \Psi_n).$$

konkret :

$$F(x,y,z) = (z, e^{xy}, x^2) \quad \longrightarrow \quad \varphi(x,y,z) = z \, dx + e^{xy} \, dy + x^2 \, dz.$$

Man sieht :

$$\{\text{1-Formen auf } U\} \;\cong\; \{\text{Vektorfelder } U \xrightarrow{C^\circ} \mathbb{R}^n\}.$$

Integration von 1-Formen (Vektorfeldern) längs Wegen

$\gamma(a)$ $\gamma(b)$ U

Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ **stückweise glatter Weg in U**, d.h. es gibt eine Zerlegung $a = t_\circ < t_1, < \ldots < t_N = t$ wie folgt:

(i) $\gamma \in C^\circ\,([a,b], U)$
(ii) $\gamma \in C^1\,((t_{k-1}, t_k), U)$ für $k = 1, \ldots, N$
(iii) $\gamma'|_{(t_{k-1},t_k)}$ läßt sich stetig in die Randpunkte fortsetzen.

(**Bemerkung :** t_k ist i.a. Sprungstelle von γ')

Definition 26.2 : Wegintegral

Sei γ wie oben und $\omega : U \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ 1-Form.
Dann ist $(\omega \circ \gamma)(\gamma') : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und

$$\boxed{\int_\gamma \omega := \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))\,dt}$$

heißt Wegintegral von ω längs γ.

$\square$

Bemerkungen :

(1) Die Def. hängt **nicht** von der Wahl der Parametrisierung von γ ab, denn :
$\sigma : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ sei Umparametrisierung von γ mit (o.E.) $\sigma' > 0$.
Mit $\Gamma : [c,d] \longrightarrow U$, $\Gamma := \gamma \circ \sigma$, folgt :

$$\begin{aligned}
& \int_c^d \omega(\Gamma(t))(\Gamma'(t))\,dt \\
= \quad & \int_c^d (\omega \circ \gamma)(\sigma(t))(\gamma'(\sigma(t))\sigma'(t))\,dt \\
\overset{\text{Linearität}}{=} \quad & \int_c^d (\omega \circ \gamma)(\sigma(t))(\gamma'(\sigma(t))) \cdot \sigma'(t)\,dt \\
\overset{\text{Sustitutionsregel}}{=} \quad & \int_a^b (\omega \circ \gamma)(s)(\gamma'(s))\,ds.
\end{aligned}$$

(2) Schreibe $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \, dx^i$

$$\Longrightarrow \quad \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\gamma(t)) \, dx^i(\gamma(t))(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\gamma(t)) \, e^i(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\gamma(t)) \gamma_i'(t)$$

Also :

$\boxed{\int\limits_\gamma \omega = \int_a^b \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i(\gamma(t)) \gamma_i'(t) \, dt}$ **Komponentendarstellung**

(3) Sei $F \in C^\circ(U, \mathbb{R}^n)$ stetiges Vektorfeld; setze

$\boxed{\int\limits_\gamma F := \int_a^b F(\gamma(t) \bullet \gamma'(t) \, dt}$ **Kurvenintegral des Vektorfeldes *F***

offenbar :

$$\int\limits_\gamma F = \int\limits_\gamma \omega_F,$$

so dass alle folgenden Aussagen über Kurvenintegrale von 1-Formen auch für Integrale von Vektorfeldern gelten.

(4) **Beispiel :**

$U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$\omega(x,y) := \frac{1}{x^2+y^2}(-y) \, dx + \frac{1}{x^2+y^2} x \, dy$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \; 0 \leq t \leq 2\pi$

dann :

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \text{ und } \omega(\gamma(t)) = -\sin t \, dx + \cos t \, dy$$

Also :

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = 2\pi$$

Obwohl der Weg geschlossen ist, ist das Kurvenintegral $\neq$ 0.

Analog :

$$\int\limits_\gamma \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) = 2\pi$$

für das Kurvenintegral des Vektorfeldes.

(5) Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow U$ regulär, d.h. injektiv mit $\gamma'(t) \neq 0$. Dann ist $\Gamma := \gamma([a,b])$ 1-dim. Mannigfaltigkeit mit natürlichen Orientierung des ,,Tangentialraums", man wählt $\gamma' \big/ |\gamma'|$ als Tangentenfeld an die Kurve, setzt also

$$T : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ T(p) := \gamma'(t) \big/ |\gamma'(t)|, \text{ falls } p = \gamma(t).$$

Dann gilt : ($\rightarrow$ Flächenformel)

$$\boxed{\int_\gamma \omega = \int_\Gamma \omega(p)\,(T(p))\,d\mathcal{H}^1(p)}$$

Rechenregeln für $\int_\gamma \omega$:

$$\begin{array}{lll}
(1) & \int_\gamma (\omega_1 + \omega_2) & = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2 \\
(2) & \int_\gamma (c \cdot \omega) & = c \cdot \int_\gamma \omega, \quad c \in \mathbb{R} \\
(3) & \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \omega & = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega
\end{array}$$

$\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$

wobei in (3) Endpunkt(γ_1) = Anfangspunkt(γ_2), also

$\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow U$, $\gamma_2 : [a,b] \longrightarrow U$, mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$. γ_1 γ_2

Dann sei

$$\gamma_1 + \gamma_2 : [a, 2b-a] \longrightarrow U, \quad \gamma_1 + \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) & , \quad a \leq t \leq b \\ \gamma_2(a+t-b) & , \quad b \leq t \leq 2b-a. \end{cases}$$

(1) - (3) folgen trivial aus der Definition.

Definition 26.3 :

Sei ω eine 1-Form auf U. ω heißt **exakt**

$$\Longleftrightarrow \quad \exists\ f \in C^1(U,\mathbb{R}) \text{ mit } \boxed{df = \omega}, \text{ d.h. } \omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i.$$

f heißt **eine Stammfunktion zu ω**.

Bemerkung :

Sei $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Vektorfeld; dann:

$$\omega_F \text{ exakt} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\ f \in C^1(U, \mathbb{R}) : \boxed{\nabla f = F}.$$

Man sagt:

das Vektorfeld F ist konservativ und f heißt ein Potential von F.

Wie prüft man Exaktheit? Dazu zur Vorbereitung folgender

Satz 26.1 :

Sei ω eine 1-Form auf U. Dann sind äquivalent:

(i) $\int\limits_{\gamma} \omega = 0 \qquad \forall$ *geschlosene Wege γ in U*

(ii) $\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega$ *für alle Wege γ_1, γ_2 in U mit gleichem Anfangs- und Endpunkt.*

Ist ω exakt, so gelten (i) und (ii).

Beweis :

(ii) $\Longrightarrow$ (i) :

Sei $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ geschlossen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$. Setze

$$\Gamma : [a, b] \longrightarrow U,\ \Gamma(t) \equiv \gamma(a) \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_{\Gamma} \omega = 0$$

und nach (ii) gilt: $\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{\Gamma} \omega$.

(i) $\Rightarrow$ (ii):

bilde $\quad \gamma := \gamma_1 + (-\gamma_2)$, $\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma_2$

wobei γ_2 durch Orientierungsumkehrung entsteht:

$-\gamma_2 : [a, b] \longrightarrow U, \quad t \mapsto \gamma_2(b + a - t)$ $\qquad\qquad\qquad \gamma_1$

$\Longrightarrow \gamma$ ist geschlossen, d.h.

$$0 = \int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{\gamma_1 + (-\gamma_2)} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega + \int\limits_{-\gamma_2} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega - \int\limits_{\gamma_2} \omega.$$

Sei nun $\omega = df$. Dann ist wegen $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx^i$

$$\int\limits_\gamma \omega = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\gamma_i'(t)\, dt = \int\limits_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\, dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0,$$

falls γ geschlossen.

$\square$

Bemerkungen :

(1) Die Eigenschaften (ii) nennt man **Wegunabhängigkeit** von $\int\limits_\gamma \omega$. Also

$$\boxed{\omega \text{ exakt auf } U \Longrightarrow \text{Wegunabhängigkeit}}$$

Die Umkehrung wird gleich untersucht.

(2) Die 1-Form $\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$ ist also auf $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ **nicht exakt**.

Satz 26.2 :

Sei ω eine 1-Form auf der **wegzusammenhängenden** *Menge U. Dann gilt:*

$$\boxed{\omega \textit{ exakt} \Longleftrightarrow \textit{das Kurvenintegral hängt nicht vom Weg ab.}}$$

Beweis :

„$\Rightarrow$" erledigt (auch für beliebige U)

„$\Leftarrow$"

Fixiere einen (Basis-) Punkt $x_\circ$ in U und setze

$$f(x) := \int\limits_\gamma \omega$$

für einen beliebige (stückweise glatten) Weg von $x_\circ$ nach x. Offenbar ist $f(x)$ wohldefiniert (, und da U als zusammenhängend vorausgesetzt wird, gibt es mindestens einen Weg von $x_\circ$ nach x in U).

Z.z.: $\quad df = \omega$

B $\quad U$

$y \quad x \quad x_\circ$

Sei dazu $x \in U$, B sei eine kleine Kugel um x in U. Sei γ ein Weg von $x_\circ$ nach x

$$\Longrightarrow \quad \gamma + \vec{xy} \text{ ist Weg von } x_\circ \text{ nach } y,\ y \in B$$

$$\Longrightarrow \quad f(y) - f(x) = \int\limits_{\vec{xy}} \omega = \int_0^1 \omega(x + t(y-x)(y-x)\,dt$$

$$\overset{\text{MWS}}{=} \quad \omega(x + s\,(y-x))(y-x) \text{ für ein } 0 < s < 1.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\big|f(y) - f(x) - \omega(x)(y-x)\big| \quad &= \quad \big|\omega(x + s(y-x))(y-x) - \omega(x)(y-x)\big| \\
(\|\cdot\| \text{ Operatornorm }) \quad &\leq \quad \big\|\omega(x + s(y-x)) - \omega(x)\big\| \cdot |y-x| \\
&\leq \quad \underbrace{\sup_{0 \leq t \leq 1} \big\|\omega(x + t(y-x)) - \omega(x)\big\|}_{=:R(y)} \cdot |x-y|
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ f ist differenzierbar in x mit $df(x) = \omega(x)$, denn
$R(y) \to 0$ bei $y \to x$ wegen der Stetigkeit von ω.

$\square$

Wie prüft man nach, ob ω exakt ist ?

Wegunabhängige Integrierbarkeit ist kein handliches Kriterium.

Definition 26.4 :

Es sei $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i\, dx^i$ *eine Differentialform der Klasse* C^1
(d.h. die Koeffizienten ω_i *sind von der Klasse* C^1*).*
ω *heißt* **geschlossen** $:\Longleftrightarrow$ *es gilt die* **Integrabilitätsbedingung**

$$\text{(IB)} \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial x_i}\,\omega_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\,\omega_i \quad \forall\ i,j}$$

Bemerkungen :

(1) $F : U \to \mathbb{R}^3$, U offen in $\mathbb{R}^3$, sei ein Vektorfeld der Klasse C^1, ω_F die zugehörige 1-Form. Dann gilt:

$$\boxed{\omega_F \text{ geschlossen} \Longleftrightarrow \text{rot}F \equiv 0}$$

(2) Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $\omega = df = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx^i$. Dann gilt:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}.$$

Also:

$$\boxed{\omega \text{ exakt mit } f \in C^2 \Longrightarrow \omega \text{ geschlossen}}$$

(3) Uns interessiert die Umkehrung, aber:

$$\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

ist geschlossen auf $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, **aber nicht exakt**.

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial y}\big(-\tfrac{y}{x^2+y^2}\big) &= \tfrac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \tfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \tfrac{\partial}{\partial x}\big(\tfrac{x}{x^2+y^2}\big) &= \tfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \tfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Für die Umkehrung braucht man zusätzliche top Bedingungen an *U*.

Definition 26.5 :

$U \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* **sternförmig** $:\Longleftrightarrow$ *es gibt einen Punkt* $x_\circ \in U$ *mit* $\overrightarrow{x_\circ x} \subset U$ *für alle* $x \in U$.

(man sagt dann: U *ist sternförmig bzgl.* $x_\circ$*).*

Bemerkungen :

(1) U konvex $\Longrightarrow U$ sternförmig bzgl. eines beliebigen Punktes

(2) sternförmig ist schwächer als konvex:

$x_\circ$

sternförmig, aber nicht konvex!

U

Satz 26.3 :

Sei U offen, **sternförmig** *und ω eine* **geschlossene** *1-Form der Classe C^1.*
Dann ist $\boldsymbol{\omega}$ exakt.

Beweis :

Gesucht ist also $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega = df$.

O.E. sei $0 \in U$ und U sternförmig bzgl. 0.

Angenommen, ein solches f existiert.

Sei $\gamma(t) = tx$, $0 \leq t \leq 1$

$$\Longrightarrow f(x) - f(0) = \int\limits_0^1 \tfrac{d}{dt} f(\gamma(t))\,dt = \int\limits_0^1 df(tx)(x)\,dt = \int\limits_0^1 \omega(tx)(x)\,dt.$$

Da offenbar mit f auch $f + c$ Stammfunktion zu ω ist, machen wir den Ansatz

$$f(x) := \int_0^1 \omega(tx)(x)\,dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx) x_i\,dt, x \in U.$$

Z.z.: $df = \omega$ (beachte: (IB) wurde noch nicht benutzt!)

Es gilt:

$$\begin{aligned}
d\Big(\int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx)x_i\,dt\Big) &= \sum_{f=1}^n \tfrac{\partial}{\partial x_j}\Big(\int\limits_0^1 \sum_{i=1}^n \omega_i(tx)x_i\,dt\Big)\,dx^j \\
&\overset{\text{Vertauschung von}}{=} \sum_{j=1}^n \int\limits_0^1 \Big\{\sum_{i=1}^n tx_i \tfrac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(tx) + \omega_i(tx)\delta_{ij}\Big\}\,dt\,dx^j \\
&= \sum_{j=1}^n \int\limits_0^1 \Big\{\omega_j(tx) + \sum_{i=1}^n tx_i \tfrac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(tx)\Big\}\,dt\,dx^j \\
&\overset{\text{(IB)}}{=} \sum_{j=1}^n \int\limits_0^1 \Big\{\omega_j(tx) + \sum_{i=1}^n tx_i \tfrac{\partial \omega_j}{\partial x_i}(tx)\Big\}\,dt\,dx^j
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\frac{d}{dt}(t\omega_j(tx)) = \{\ldots\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} df(x) &= \sum_{j=1}^n \int\limits_0^1 \tfrac{d}{dt}\big(t\omega_j(tx)\big)\,dt\,dx^j \\ &= \sum_{j=1}^n \omega_j(x)\,dx^j \\ &= \omega(x). \end{aligned}$$

$\square$

Zusammenfassung

U offen in $\mathbb{R}^n$, $\omega\, C^1$ 1- Form

$$\begin{array}{ccc}
\omega \text{ exakt} & \overset{26.1}{\Longrightarrow} & \text{alle Umlaufintegrale } 0 \\
\Uparrow 26.3 & & \Updownarrow 26.1 \\
\begin{array}{c}\omega \text{ geschlossen (IB)} \\ + \text{ top. Bedingung an } U\end{array} & & \begin{array}{c}\text{Wegintegrale hängen nur vom} \\ \text{Anfangs- und Endpunkt ab}\end{array}
\end{array}$$

andererseits:

(1) ω exakt $\Longrightarrow$ ω geschlossen (ohne Bedingung an U)
(denn: $\omega = df$ mit $\omega \in C^1$ impliziert $f \in C^2$ und damit (IB) klar!)

(2) alle Umlaufintegrale 0 $+$ U zusammenhängend $\overset{26.2}{\Longrightarrow}$ ω exakt

D.h.:

$$\boxed{U \text{ sternförmig} \quad \Longrightarrow \quad \text{exakt, geschlossen, wegunabhängig integrabel sind äquivalent}}$$

In Termen von Vektorfeldern $F : \mathbb{R}^3 \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ der Klasse C^1 hat man:

$$\boxed{F \text{ konservativ} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rot} F = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Umlaufintegrale sind } 0}$$

vorausgesetzt U ist sternförmig.

Differentialformen vom Grad $r \geq 1$

Wir erinnern an einige Begriffe aus der Algebra.

Sei V ein $\mathbb{R}$-V.R. Wir setzen für $m \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\bigwedge^m V := \Big\{ \Phi : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{m\text{-fach}} \longrightarrow \mathbb{R} \Big| \; \Phi \text{ ist } m\text{-linear und alternierend } \Big\}}$$

Dabei heißt eine m-lineare Abbildung **alternierend**, falls $\Phi(v_1, \ldots, v_m) = 0$ gilt, wenn $v_i = v_j$ ist für mindestens ein Indexpaar $i \neq j$.

Äquivalent dazu ist:

$$\Phi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(m)}) = (\operatorname{sign} \sigma)\Phi(v_1, \ldots, v_m) \text{ für jede Permutation } \sigma \text{ von } \{1, \ldots, m\}$$

oder

$$\Phi(\ldots v \ldots w \ldots) = -\Phi(\ldots w \ldots v \ldots) \text{ bei Vertauschen von zwei Stellen.}$$

Beispiel :

$V = \mathbb{R}^n$, $m = n$

$$\Phi(v_1, \ldots, v_n) = \det(v_1, \ldots, v_n)$$

ist n-lineare alternierende Abb. in den Spaltenvektoren $v_1, \ldots, v_n$.

Bemerkungen :

(1) Vereinbarung: $\bigwedge^\circ V = \mathbb{R}$

(2) Es gilt $\bigwedge^1 V = V^*$ (Dualraum)

Lemma :

Sei $\Phi : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{m} \longrightarrow \mathbb{R}$ m-linear. Dann sind äquivalent:

(i) Φ ist alternierend

(ii) $\Phi(v_1, \ldots, v_m) = 0$ falls $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig.

Folgerung :

$$\boxed{\dim V = n < m \quad \Longrightarrow \quad \bigwedge^m V = 0,}$$

denn m Vektoren aus V sind ja stets linear abhängig, so dass $\Phi(v_1, \ldots, v_m) = 0$. Mithin ist Φ die Nullabbildung.

Basisdarstellung :

$\dim V = n < \infty$, $e_1, \ldots, e_n$ sei eine Basis von V, $m \leq n$.
Setze für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\alpha_1 < \ldots < \alpha_m \leq n$,

$$\Omega^\alpha : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{m} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega^\alpha(e_{\beta_1}, \ldots, e_{\beta_m}) := \left\{ \begin{array}{lll} 0 & , & \alpha \neq \beta \\ 1 & , & \alpha = \beta \end{array} \right. , \qquad \begin{array}{l} \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m), \\ 1 \leq \beta_1 < \ldots < \beta_m \leq n \end{array} \\ \\ + \; m\text{-lineare, alternierende Fortsetzung} \end{array} \right.$$

Dann ist $\Omega^\alpha \in \bigwedge^m V$ und es gilt:

$$\{\Omega^\alpha : 1 \leq \alpha_1 < \ldots, < \alpha_m \leq n\}$$

ist eine **Basis von $\bigwedge^m V$**.

Folglich hat $\Phi \in \bigwedge^m V$ die eindeutige Darstellung

$$\boxed{\Phi = \sum_{1\leq\alpha_1<\ldots<\alpha_m\leq n} \Phi_\alpha \cdot \Omega^\alpha}$$

mit Koeffizienten $\Phi_\alpha \in \mathbb{R}$.

$\square$

Korollar:

$$\boxed{\begin{array}{ll} m < n: & \dim V = n \Longrightarrow \dim \bigwedge^m V = \binom{n}{m} \\ \text{Speziell:} & \dim \bigwedge^1 V = \dim V^* = n \\ & \dim \bigwedge^n V = 1 \\ m > n: & \dim \bigwedge^m V = 0. \end{array}}$$

Beispiele :

1) $V = \mathbb{R}^3$, $m = 2 \quad \Longrightarrow \quad \dim \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 = 3$.
   (e_1, e_2, e_3 kanonische Basis), dann gilt:

   a) $$\begin{aligned} \Omega^{(1,3)}\big((1,2,3)\,,\,(0,0,1)\big) &= \Omega^{(1,3)}(e_1,e_3) + 2\Omega^{(1,3)}(e_2,e_3) + 3\Omega^{(1,3)}(e_3,e_3) \\ &= \Omega^{(1,3)}(e_1,e_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   b) $\Omega^{(2,3)}\big((0,0,4)\,,\,(0,1,0)\big) = 4\Omega^{(2,3)}(e_3,e_2) = -4.$

2) $V = \mathbb{R}^n$, $m = n \quad \Longrightarrow \quad \dim \bigwedge^n V = 1$
   $e_1, \ldots, e_n$ kanonische Basis

   $$\boxed{\Omega^{(1,2,\ldots,n)}(v_1,\ldots,v_n) = \det(v_1,\ldots,v_n)}$$

   denn:
   $(v_1,\ldots,v_n) \mapsto \det(v_1,\ldots,v_n)$ ist Element von $(\bigwedge^n \mathbb{R}^n) - \{0\}$,
   und da $\dim \bigwedge^n \mathbb{R}^n = 1$ ist, folgt $\Omega^{(1,2,\ldots,n)} = a \cdot \det$ mit $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.
   Nun werte dies aus auf $(e_1,\ldots,e_n)$, um $a = 1$ zu sehen.

Definition 26.6 :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m \in \mathbb{N}_\circ$, $\ell \in \mathbb{N}_\circ$. Eine Abbildung $\omega : U \longrightarrow \bigwedge^m \mathbb{R}^n$ der Klasse C^ℓ heißt **Differentialform vom Grad m der Klasse C^ℓ auf U**.

Bemerkungen :

(1) $m = 0 \implies$ die Differentialform vom Grad 0 sind die Funktionen $\in C^\ell(U, \mathbb{R})$

(2) $m = 1 \implies$ 1-Formen auf U

(3) für jedes $x \in U$ ist $\omega(x) : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{m} \longrightarrow \mathbb{R}$ m-linear und alternierend.

(4) Sei $f \in C^\ell(u, \mathbb{R})$. Dann ist $\omega = f \cdot \det$ eine Differentialform vom Grad n der Klasse C^ℓ.

Wie erzeugt man Differentialformen? $\longrightarrow$ äußeres Produkt

Lemma :

Sei V endlichdimensional. Für r, $s \in \mathbb{N}_\circ$ gibt es einen **eindeutig** festgelegten Operator ("äußeres Produkt")

$$\wedge : \bigwedge^r V \times \bigwedge^s V \longrightarrow \bigwedge^{r+s} V$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\wedge$ ist **bilinear**:

$(a\omega + b\tilde{\omega}) \wedge \eta = a(\omega \wedge \eta) + b(\tilde{\omega} \wedge \eta)$

$\omega \wedge (c\eta + d\tilde{\eta}) = \ldots$

(ii) $\wedge$ ist **assoziativ**:

$\omega \in \bigwedge^r V$, $\eta \in \bigwedge^s V$, $\alpha \in \bigwedge^t V \quad \implies \quad \omega \wedge (\eta \wedge \alpha) = (\omega \wedge \eta) \wedge \alpha$.

(iii) $\wedge$ ist **antikommutativ**:

$\eta \wedge \omega = (-1)^{r \cdot s} \omega \wedge \eta$

(iv) $\bigwedge^0 V \wedge \bigwedge^r V \longrightarrow \bigwedge^r V$ ist gegeben durch

$c \wedge \alpha = c \cdot \alpha$. (beachte $c \in \mathbb{R}$, da $\bigwedge^0 V = \mathbb{R}$)

Beweis :

Sei $\omega \in \bigwedge^r V$, $\eta \in \bigwedge^s V$. Dann folgt aus (i) - (iv):

$(*)$ $\quad (\eta \wedge \omega)(v_1, \ldots, v_{r+s}) = \sum\limits_{\sigma \in I_{r,s}} (\mathrm{sign}\sigma) \cdot \eta(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}) \cdot \omega(v_{\sigma(r+1)}, \ldots, v_{\sigma(r+s)})$

wobei $I_{r,s}$ alle Permutationen $\{1, \ldots, r+s\}$ umfaßt, die auf $\{1, \ldots, r\}$ und $\{r+1, \ldots, r+s\}$ streng wachsen.

Nun definiert man $\eta \wedge \omega$ durch $(*)$ und rechnet alle Eigenschaften nach.

$\square$

Bemerkungen :

(1) $(*)$ muß man sich **nicht** merken, aus (i) - (iv) kann man $\eta \wedge \omega$ immer im konkreten Fall ausrechnen ($\rightarrow$ s.u.).

(2) $V = \mathbb{R}^n$, $e_1, \ldots, e_n$ Standardbasis, $e^1, \ldots, e^n$ duale Basis

$\Longrightarrow \quad \{e^{\alpha(1)} \wedge \ldots \wedge e^{\alpha(m)} : 1 \leq \alpha(1) < \ldots < \alpha(m) \leq n\}$ Basis von $\bigwedge^m \mathbb{R}^n$

konkret:

$e^1 \wedge e^2$, $e^2 \wedge e^3$, $e^1 \wedge e^3$ Basis von $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$, dann hat $\omega \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ die Darstellung

$$\omega = a \cdot e^1 \wedge e^2 + b\, e^2 \wedge e^3 + c\, e^1 \wedge e^3 \text{ mit } a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

(3) Beispiel: $V = \mathbb{R}^4 \qquad (a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (a\, e^1 \wedge e^3 + b\, e^2 \wedge e^4) \wedge (c\, e^2 \wedge e^3) &= a \cdot c\, (e^1 \wedge e^3) \wedge (e^2 \wedge e^3) + b \cdot c\, (e^2 \wedge e^4 \wedge e^2 \wedge e^3) \\ &= -a \cdot c\, (e^1 \wedge e^3 \wedge e^3 \wedge e^2) - b \cdot c(e^4 \wedge e^2 \wedge e^2 \wedge e^3) \\ &= 0\,, \quad \text{da } e^i \wedge e^i = 0. \end{aligned}$$

Definition 26.7 :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Das **äußere Produkt $\boldsymbol{\eta} \wedge \boldsymbol{\omega}$ von Differentialformen** *wird punktweise erklärt, d.h.*

$$(\eta \wedge \omega)(x) := \eta(x) \wedge \omega(x).$$

Beispiele :

(1) $dx^1, \ldots, dx^n$ waren die konstanten 1-Formen

$$dx^i(x) \equiv e^i.$$

Damit erzeugt man die konstanten m-Formen

$$dx^\alpha := dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_m},\ \ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m),$$

die an jeder Stelle x den Wert $e^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge e^{\alpha_m}$ haben.
Ist $\omega : U \longrightarrow \bigwedge^m \mathbb{R}^n$, so kann man schreiben

$$\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha\, dx^\alpha,$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $1 \leq \alpha_1 < \ldots \alpha_m \leq n$.
Die $\omega_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sind die Koeffizientenfunktionen.

(2) auf $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rcll} \omega & = & 2x\,dx \wedge dz & \text{2-Form} \\ \eta & = & z \cdot dy & \text{1-Form} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrl} \omega \wedge \eta & = & 2xz & dx \wedge dz \wedge dy \\ & = & -2xz & dx \wedge dy \wedge dz \end{array}$$

Basisdarstellung der 3-Form $\omega \wedge \eta$.

□

Äußere Ableitung (von Differentialformen)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $\omega : U \longrightarrow \bigwedge^m \mathbb{R}^n$ m-Form der Klasse C^ℓ. Da ω Werte in einem Vektorraum endlicher Dimension hat, ist die Bedeutung von $\omega \in C^\ell$ klar. In Termen der Basisdarstellung

$$\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha \, dx^\alpha$$

bedeutet dies: die Koeffizienten ω_α gehören zu $C^\ell(U, \mathbb{R})$. Ist $\ell \geq 1$, so kann man die totale Ableitung $D\omega(a)$ ausrechnen und erhält eine lineare Abb. $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bigwedge^m \mathbb{R}^n$. Es gilt also

$$L(v) \in \bigwedge^m \mathbb{R}^n,$$

so dass

$$L(v)(w_1, \ldots, w_m) =: B(v, w_1, \ldots, w_m)$$

bildbar ist. B ist $(m{+}1)$-linear, aber nur schiefsymmetrisch bzgl. der Variablengruppe $w_1, \ldots, w_m$. Uns interessieren nun der alternierende Anteil von B, und diesen nennen wir die **äußere Ableitung** $d\omega(a) \in \bigwedge^{m+1} \mathbb{R}^n$ von ω bei a.

Wir geben eine explizite Konstruktion:

(1) f 0-Form der Klasse $C^1(U)$ (also eine C^1-Funktion). **Die äußere Ableitung** df ist die 1-Form (von früher)

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx^i \quad \text{(offenbar: } df \text{ nur noch } C^\circ)$$

(2) $\omega : U \longrightarrow \bigwedge^m \mathbb{R}^n$ m-Form der Klasse C^1, $\omega = \sum\limits_{\alpha_1, < \ldots < \alpha_m} \omega_\alpha \, dx^\alpha$

äußere Ableitung :

$$\boxed{d\omega := \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_m} d\omega_\alpha \wedge dx^\alpha} \quad \Longrightarrow \quad d\omega \text{ ist } (m+1)\text{-Form auf } U.$$

Beachte:

(1) gemäß $d\omega_\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_i}\, dx^i$ ist

$$d\omega = \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_i}\, dx^i \wedge dx^\alpha .$$

Dies ist allerdings keine Basisdarstellung, dazu muß man die Produkte $dx^i \wedge dx^\alpha$ erst sortieren.

(2) $m = n \Longrightarrow d\omega \equiv 0$ aus Dimensionsgründen!

(3) $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i\, dx^i$ 1-Form $\Longrightarrow$
$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{1\le i<j\le n} \left(\tfrac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \tfrac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\right) dx^i \wedge dx^j \end{aligned}$$

Man sieht:

die 1-Form ω ist geschlossen (I.B. gilt) $\iff$ $d\omega = 0$

(4) $n = 3$:

a) $\omega = 4x \cdot dy \wedge dz$

$\Longrightarrow$ $d\omega = 4\, dx \wedge dy \wedge dz \equiv 4 \cdot \det$, d.h. $\omega(x, y, z) \equiv 4 \cdot \det$

b) $\omega = \sin x \cdot dy + e^z\, dx$ $\Longrightarrow$

$$d\omega = \cos x\ dx \wedge dy + e^z dz \wedge dx = \cos x\, dx \wedge dy - e^z dx \wedge dz$$

und

$$\begin{aligned} d\,(d\omega) &= d(\cos x\ dx \wedge dy) - d(e^z\ dx \wedge dz) \\ &= -sinx\ dx \wedge dx \wedge dy - e^z\ dz \wedge dx \wedge dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Für die äußere Ableitung gilt

Satz 26.4 :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $0 \le r,\ s \le n$. Dann gilt:

(i) $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$ *für C^1 r-Formen ω, η auf U*

(ii) $d(f \cdot \omega) = f\, d\omega + df \wedge d\omega$ *für 0-Formen f, r-Formen ω der Klasse C^1*

(iii) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{grad\,\omega}\, \omega \wedge d\eta$ *für r-Form ω, s-Form η der Klasse C^1*

(iv) $d(d\omega) = 0$ *für r-Formen der Klasse C^2*

Beweis :

Triviale Rechnungen mit der Definition!

z.B. (iv): für Funktionen f ist

$$d(df) = d\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx^i\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

da $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, aber $dx^j \wedge dx^i = -\, dx^i \wedge dx^j$.

Sei $\omega = \sum\limits_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_r} \omega_\alpha \, dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r}$.

Es genügt der Nachweis von

$$d\left(d\{\omega_\alpha dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r}\}\right) = 0 :$$

$$\begin{aligned} d\left(d\{\omega_\alpha dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r}\}\right) &= d\left(d\omega_\alpha \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r}\right) \\ &\overset{\text{(iii)}}{=} \underbrace{(d\, d\omega_\alpha)}_{=0} \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r} - d\omega_\alpha \wedge \underbrace{d\,(dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_r})}_{=0 \text{ nach Def. von } d} \end{aligned}$$

□

Notation :

Sei ω r-Form der Klasse C^1 auf U.

(1) $\boldsymbol{\omega}$ **geschlossen**: $\iff d\omega = 0$

(2) $\boldsymbol{\omega}$ **exakt**: $\iff \exists\ (r-1)$-Form, Ω mit $\omega = d\Omega$

Offenbar:

$$\omega \text{ exakt } \Longrightarrow \omega \text{ geschlossen.}$$

Mit analogen Argumenten wie im Beweis von Satz 26.3 kann man zeigen

Satz 26.5 :

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und **sternförmig**.

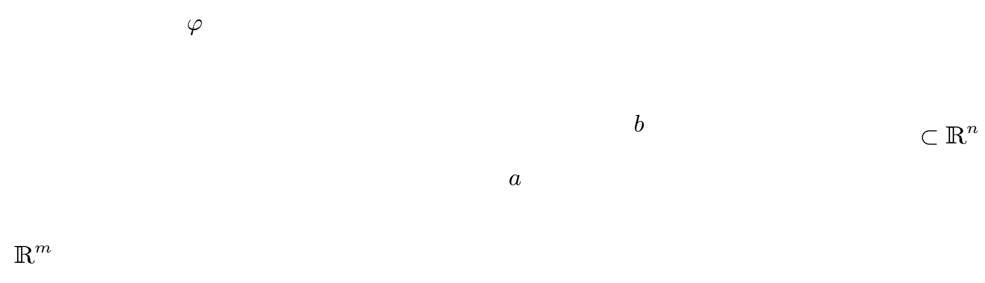
Ist die r-Form ω der Klasse C^1 geschlossen so ist ω exakt.

□

Jetzt zum **Satz von Stokes in einer speziellen Form**. Die allgemeine Version erfordert die genaue Diskussion von berandeten Mannigfaltigkeiten, auf die wir aus Zeitgründen verzichten. ($\rightarrow$ Barner - Flohr, Bd. II)

1-Formen lassen sich längs Wegen in $\mathbb{R}^n$ integrieren, also liegt es nahe, $\boldsymbol{m}$**-Formen über** $\boldsymbol{m}$**-dimensionale Untermannigfaltigkeiten zu integrieren**.

Sei M eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.



Dann wissen wir:

Zu $a \in M$ existieren W_a offen in $\mathbb{R}^m$, U_a offen in $\mathbb{R}^n$ und $\varphi_a : W_a \longrightarrow \mathbb{R}^n$ regulär mit

$$\varphi_a(W_a) = U_a \cap M.$$

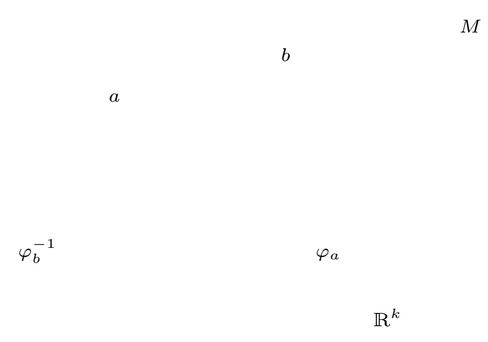
Nun fixiere $a \in M$ und eine Orientierung von T_aM, etwa sei $\frac{\partial}{\partial x_1}\,\varphi_a, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\,\varphi_a$ positiv orientierte Basis von $T_xM, x \in M \cap U_a$.

Wenn $M \cap U_a \cap U_t \neq \emptyset$ ist, so kann φ_b dort genau die entgegengesetzte Orientierung induzieren, d.h. $\frac{\partial}{\partial x_1}\,\varphi_b, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\,\varphi_b$ ist negativ orientiert oder äquivalent:

$$\det D(\varphi_b^{-1} \circ \varphi_a) < 0.$$

Definition 26.8 :

a) *Kann man die Mannigfaltigkeit M so durch Karten beschreiben, dass auf den Überlappungsbereichen stets* $\det D(\varphi_b^{-1} \circ \varphi_a) > 0$ *gilt, so nennt man M* **orientierbar**.



b) *Ist M orientierbar und a ein Punkt aus M, so wird auf M eine Orientierung O festgelegt, wenn man in T_aM eine Basis auszeichnet und diese positiv nennt. M zusammen mit dieser Orientierung O heißt* **orientierte Mannigfaltigkeit**.

Beispiel : (M Hyperfläche $\subset \mathbb{R}^n$)

Annahme: es gibt ein stetiges Normalfeld $\mathcal{N} : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ auf M, d.h. $\mathcal{N}(x) \in T_x M$, $|\mathcal{N}(x)| = 1$.

Wählt man dann in $T_x M$ jeweils $e_1(x), \dots, e_{n-1}(x)$ so, dass $e_1(x), \dots, e_{n-1}(x), \mathcal{N}(x)$ zur Standardbasis äquivalent ist, so wird eine Orientierung von M festgelegt. Das Normalfeld $\mathcal{N}$ orientiert M entgegengesetzt.

Definition 26.9 :

Sei (M, O) eine orientierte m-dimensionale Mannigfaltigkeit, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen $\supset M$ und $\omega : U \longrightarrow \bigwedge^m \mathbb{R}^n$ stetig. Das **orientierte Integral von ω über (M, O)** *ist*

$$\boxed{\int_{(M,O)} \omega := \int_M \omega(x)\big(\tau_1(x), \dots, \tau_m(x)\big)\, d\mathcal{H}^m(x)\ .}$$

Ist O festgelegt, so schreibt man kurz $\int_M \omega$.

$\tau_1(x), \dots, \tau_m(x)$ ist hier eine positive ONB von $T_x M$.

Bemerkungen

(1) Man muß natürlich sicherstellen, dass $x \mapsto \omega(x)\big(\tau_1(x), \dots, \tau_m(x)\big)$ auf M $\mathcal{H}^m$- integrierbar oder -summierbar ist!

(2) Wie berechnet man $\int_M \omega$?

Fall 1:

Man kommt mit einer Karte aus: $M = \varphi(W)$, $\varphi : \mathbb{R}^m \supset W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ regulär. Ist dann $\partial_1\varphi, \dots, \partial_m\varphi$ positive Basis, so folgt aus der **Flächenformel** (die Jacobische kürzt sich!)*

$$\int_M \omega = \int_W \omega(\varphi(x))(\partial_1, \varphi, \dots, \partial_m\varphi)\, d\mathcal{L}^m.$$

Fall 2:

Zerlege M in Stücke M_i (disjunkt), die durch eine Abbildung beschrieben werden und benutze Fall 1 sowie

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{M_i} \omega$$

$\square$

* es ist $\omega\big(\varphi(x)\big)\big(\partial_1\varphi(x) \dots \partial_m\varphi(x)\big) = [\![D\varphi(x)]\!]\omega\big(\varphi(x)\big)\big(\tau_1(\varphi(x)), \dots, \tau_m(\varphi(x))\big)$

Definition 26.10 :

$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt $\boldsymbol{m}$**-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand**, *falls gilt:*
zu jedem $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$, so dass

entweder: *$M \cap U$ m- dimensionale Mannigfaltigkeit ist*

oder: *es gibt eine offene Umgebung V von 0 in $\mathbb{R}^n$ sowie einen Diffeomorphismus $\Psi : U \longrightarrow V$ mit $\Psi(x) = 0$ und $\Psi(U \cap M) = \{y \in V : y^{m+1} = \ldots = y^n = 0,\, y^m \geq 0\}$*

“oder”: *$\Psi(U \cap M)$ ist für $m = 2$, $n = 3$ im Prinzip eine Halbkreisscheibe in $y_1 y_2$-Ebene, und zwar im Bereich $y^2 \geq 0$*

y_3

V

M

0

x $\subset \mathbb{R}^3$

y_2

$\psi(U \cap M)$

U

y_1

Definition 26.11 :

Ist M Mannigfaltigkeit mit Rand, so setzt man $\partial M := \{x \in M :$es gilt “oder” $\}$, und nennt diese Menge den **Rand von $\boldsymbol{M}$**.

Achtung : ∂M ist **nicht** der topologische Rand von M !

Offenbar: $M - \partial M$ ist Mannigfaltigkeit im alten Sinn.

Beispiel :

$\Psi : \{z \in \mathbb{R}^n : |z| < 1\} \longrightarrow U$ Diffeom. der 1-Kugel auf eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow$ $M := \Psi\big(\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r,\, x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}\big)$
ist Mannigfaltigkeit der Dim. m mit Rand, sofern $r < 1$.

$$\partial M = \Psi\big(\{x \in \mathbb{R}^n : \, |x| = r,\, x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}\big)$$

ψ

U

Bemerkung :

M Mannigfaltigkeit der Dim. m mit Rand	$\Longrightarrow$	∂M Mannigfaltigkeit der Dim. $m-1$.

Es gilt:

$$T_x\partial M \subset T_x M.$$

M

x

$\mathcal{N}(x)$

Sei M **orientierte** Mannigfaltigkeit mit Rand. Sei $x \in \partial M$. Dann gibt es in $T_x M$ genau 2 Vektoren η_1, η_2 der Länge 1 mit $\eta_i \in T_x\,\partial M^\perp$. η_1 und η_2 sind entgegengerichtet, d.h. $\eta_2 = -\eta_1$, und sie bilden anschaulich den inneren und den äußeren Normalenvektor an ∂M.

Definition 26.12 :

Sei $\mathcal{N}(x)$ *der* **äußere Normalenvektor** *an* ∂M.

Eine ONB $\tau_1(x), \ldots, \tau_{m-1}(x)$ *von* $T_x\partial M$ *heißt* **positiv**	$\Longleftrightarrow$	$\tau_1(x), \ldots, \tau_{m-1}(x), \mathcal{N}(x)$ *ist* **positive** *Basis von* $T_x M$.

Dadurch wird ∂M *orientiert, man nennt diese Orientierung die* **induzierte Orientierung** $\boldsymbol{O'}$.

Theorem : Stokes

Sei (M, O) orientierte berandete m-Mannigfaltigkeit, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $U \supset M$ und $\omega : U \longrightarrow \bigwedge^{m-1}\mathbb{R}^n$ von der Klasse C^1. Dann gilt:

$$\int_{(M,O)} d\omega = \int_{(\partial M O')} \omega$$

<u>Spezialfall</u>: $\boldsymbol{n = 3,\ m = 2}$

ν

τ x

$\mathcal{N}$

M

M habe ein Normalenfeld ν

Orientierung O:	$v_1, v_2 \in T_xM$ positiv	$\Longleftrightarrow$	v_1, v_2, ν positive Basis von $\mathbb{R}^3$
Orientierung O':	$\tau \in T_x\partial M$ positiv	$\Longleftrightarrow$	$\tau, \mathcal{N}$ positive Basis von T_xM
		$\Longleftrightarrow$	$\tau, \mathcal{N}, \nu$ positive Basis von $\mathbb{R}^3$

Dann:

$$\omega \text{ 1-Form der Klasse } C^1 \text{ auf Umg. von } M \quad \Longrightarrow \quad \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (*)$$

Rechts steht jetzt ein Linienintegral!

Da 1-Formen und Vektorenfelder F isomorph sind, folgt aus $(*)$ der **klassische Satz von Stokes**

$$\int_M \mathrm{rot}F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^2 = \int_{\partial M} F \cdot \tau \, d\mathcal{H}^1.$$