UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Martin Fuchs
M. Sc. Dominik Schillo

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie I
Wintersemester 2017/2018

Blatt 1, Lösungen Abgabetermin: /

Aufgabe 1 (5+5=10 Punkte)

Für alle $t \in \mathbb{R}$ schneidet die ebene Gerade durch die Punkte $(0,1)$ und $(t,0)$ die Einheitskreislinie $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, x^2 + y^2 = 1\right\}$ in genau einem von $(0,1)$ verschiedenen Punkt, der durch $(x(t), y(t))$ bezeichnet sei.

(i) Bestimmen Sie die Funktionen $x, y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass durch $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (x(t), y(t))$ eine reguläre Parametrisierung von $K \setminus \{(0,1)\}$ gegeben ist.

(ii) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\alpha|_{[-1,1]} \colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \alpha(t)$.

Lösung. (i) Seien $t \in \mathbb{R}$ und

$$\gamma_t \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ s \mapsto (as+b, cs+d),$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\gamma_t(0) = (b,d) = (0,1) \quad \text{und} \quad \gamma_t(1) = (a, c+d) = (t, 0),$$

also

$$\gamma_t(s) = (ts, -s+1)$$

für alle $s \in [0,1]$. Weiterhin gilt

$$|\gamma_t(s)|^2 = |ts|^2 + |-s+1|^2 = s^2t^2 + (1-s)^2 = s^2t^2 + 1 - 2s + s^2 = s(s(t^2+1) - 2) + 1 = 1$$

genau dann, wenn

$$s = 0 \quad \text{oder} \quad s = \frac{2}{t^2+1}.$$

Damit erhalten wir

$$x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{2t}{t^2+1}$$

und

$$y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto 1 - \frac{2}{t^2+1} = \frac{t^2-1}{t^2+1},$$

sodass

$$\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (x(t), y(t)) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right).$$

Da

$$\alpha'(t) = \frac{2}{(t^2+1)^2}(1-t^2, 2t) \neq 0$$

(bitte wenden)

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, ist α eine reguläre Parametrisierung. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{Bild}(\alpha) = K \setminus \{(0,1)\}$. Sei dazu $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in K \setminus \{(0,1)\}$. Wir suchen ein $t \in \mathbb{R}$ so, dass

$$(x(t), y(t)) = (\tilde{x}, \tilde{y})$$

gilt. Angenommen es gibt ein $t \in \mathbb{R}$ so, dass

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right) = (\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Für $\tilde{x} = 0$, d.h. $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, -1)$, ist $t = 0$ die eindeutige Lösung. Für $\tilde{x} \neq 0$ besitzt obiges Gleichungssystem die eindeutige Lösung

$$t = \frac{1+\tilde{y}}{\tilde{x}},$$

sodass $\mathrm{Bild}(\alpha) = K \setminus \{(0,1)\}$.

(ii) Für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\alpha'(t) = \frac{1}{(t^2+1)^2}\left(-2(t^2-1), 4t\right)$$

und

$$\begin{aligned} \left|\alpha'(t)\right| &= \frac{1}{(t^2+1)^2}\sqrt{4(t^2-1)^2+16t^2} \\ &= \frac{1}{(t^2+1)^2}\sqrt{4t^4-8t^2+4+16t^2} \\ &= \frac{2}{(t^2+1)^2}\sqrt{t^4+2t^2+1} \\ &= \frac{2}{t^2+1}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int_{-1}^{1} \left|\alpha'(t)\right| \, \mathrm{d}t = 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2+1} \, \mathrm{d}t = 2[\arctan(t)]_{-1}^{1} = \pi.$$

Aufgabe 2 **(5+5=10 Punkte)**

Begründen Sie, dass die folgenden Kurven im $\mathbb{R}^3$ endliche Länge haben und berechnen Sie diese:

(i) $\beta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (6t, 3t^2, t^3)$,

(ii) $\gamma\colon [0,\sqrt{2}] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t, t\sin(t), t\cos(t))$. (*Hinweis : Sie können folgende Identität ohne Beweis benutzen:* $\int_0^s \sqrt{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+s^2}\cdot s + \operatorname{arsinh}(s)\right)$ *mit* $s > 0$.)

Lösung. (i) Es gilt

$$\beta'(t) = (6, 6t, 3t^2) = 3(2, 2t, t^2)$$

für alle $t \in [0,1]$, sodass

$$\left|\beta'(t)\right| = 3\sqrt{4+4t^2+t^4} = 3(2+t^2)$$

für alle $t \in [0,1]$ folgt. Damit erhalten wir

$$\int_0^1 \left|\beta'(t)\right|\ \mathrm{d}t = 3\int_0^1 2+t^2\ \mathrm{d}t = 3\left[2t+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = 7.$$

(ii) Es gilt

$$\gamma'(t) = (1, \sin(t)+t\cos(t), \cos(t)-t\sin(t))$$

für alle $t \in [0,\sqrt{2}]$, sodass

$$\begin{aligned}\left|\gamma'(t)\right|^2 &= 1 + (\sin(t)+t\cos(t))^2 + (\cos(t)-t\sin(t))^2 \\ &= 1+\sin(t)^2 + 2\sin(t)\cos(t)t + (t\cos(t))^2 + \cos(t)^2 - 2t\cos(t)\sin(t) + (t\sin(t))^2 \\ &= 2+t^2 \\ &= 2\left(1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right)\end{aligned}$$

für alle $t \in [0,\sqrt{2}]$ folgt. Damit erhalten wir mit dem Hinweis

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}} \left|\gamma'(t)\right|\ \mathrm{d}t &= \sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\ \mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2} + \operatorname{arsinh}(1).\end{aligned}$$

Aufgabe 3 **(5+5=10 Punkte)**

Parametrisieren Sie die folgenden Kurven nach der Bogenlänge:

(i) $\delta\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto e^{-t}(\cos(t), \sin(t), 1)$,

(ii) $\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$.

Lösung. (i) Es gilt

$$\begin{aligned}\delta'(t) &= -e^{-t}(\cos(t), \sin(t), 1) + e^{-t}(-\sin(t), \cos(t), 0)\\ &= e^{-t}(-\cos(t) - \sin(t), \cos(t) - \sin(t), -1)\end{aligned}$$

für alle $t \in (1,\infty)$, sodass

$$\left|\delta'(t)\right| = e^{-t}\sqrt{(\cos(t) + \sin(t))^2 + (\cos(t) - \sin(t))^2 + 1} = \sqrt{3}e^{-t}$$

für alle $t \in (1,\infty)$ folgt. Damit erhalten wir für alle $t \in (1,\infty)$

$$\int_1^t \left|\delta'(\tau)\right|\ \mathrm{d}\tau = \sqrt{3}[-e^{-\tau}]_1^t = \sqrt{3}(-e^{-t} + e^{-1})$$

und schließlich

$$s\colon (1,\infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \int_1^t \left|\delta'(\tau)\right|\ \mathrm{d}\tau = \sqrt{3}(-e^{-t} + e^{-1}).$$

Die Umkehrfunktion von s eingeschränkt auf das Bild ergibt sich zu

$$\varphi = s^{-1}\colon \left(0, \frac{\sqrt{3}}{e}\right) \to (1,\infty),\ t \mapsto -\ln\left(-\left(\frac{t}{\sqrt{3}} - e^{-1}\right)\right).$$

Damit ist

$$\overline{\alpha}\colon \left(0, \frac{\sqrt{3}}{e}\right) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \alpha(\varphi(t))$$

die Umparametrisierung nach Bogenlänge.

(ii) Es gilt

$$\varepsilon'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, sodass

$$\left|\varepsilon'(t)\right|^2 = e^{2t} + e^{-2t} + 2 = e^{-2t}\left(e^{4t} + 2e^{2t} + 1\right) = e^{-2t}\left(e^{2t} + 1\right)^2 = \left(e^t + e^{-t}\right)^2$$

Damit erhalten wir für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\int_0^t \left|\varepsilon'(\tau)\right|\ \mathrm{d}\tau = \int_0^t e^\tau + e^{-\tau}\ \mathrm{d}\tau = \left[e^\tau - e^{-\tau}\right]_0^t = 2\sinh(t)$$

und schließlich

$$s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \int_1^t \left|\varepsilon'(\tau)\right|\ \mathrm{d}\tau = 2\sinh(t).$$

Die Umkehrfunktion von s ergibt sich zu

$$\varphi = s^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \operatorname{arsinh}\left(\frac{t}{2}\right).$$

Damit ist

$$\overline{\alpha}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \alpha(\varphi(t))$$

die Umparametrisierung nach Bogenlänge.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 **(5+5=10 Punkte)**

Seien $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) eine reguläre Kurve, $[a,b] \subset I$ und $A = \alpha(a)$, $B = \alpha(b)$ mit $A \neq B$. Zeigen Sie:

(i) Für jeden Einheitsvektor $e \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(B - A) \cdot e \leq L_\alpha,$$

wobei L_α die Länge des Bogens von A nach B sei.

(ii) Die kürzeste Länge von A nach B ist die Strecke, welche diese beiden Punkte verbindet.

Lösung. (i) Sei $e \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor. Dann gilt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\alpha(b) - \alpha(a) = \left(\int_0^1 \alpha'(a + t(b-a)) \,\mathrm{d}t \right) (b-a) = \int_a^b \alpha'(t) \,\mathrm{d}t,$$

sodass mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$(\alpha(b) - \alpha(a)) \cdot e = \left(\int_a^b \alpha'(t) \,\mathrm{d}t \right) \cdot e \leq \left| \int_a^b \alpha'(t) \,\mathrm{d}t \cdot e \right| \leq \left| \int_a^b \alpha'(t) \,\mathrm{d}t \right| |e| \leq \int_a^b \left|\alpha'(t)\right| \,\mathrm{d}t$$

folgt.

(ii) Seien

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \alpha(a) + t(\alpha(b) - \alpha(a))$$

und

$$e = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{|\alpha(b) - \alpha(a)|}.$$

Dann gilt

$$L_\gamma = |\alpha(b) - \alpha(a)| = (\alpha(b) - \alpha(a)) \cdot e \leq L_\alpha.$$