

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie (WiSe 21/22)
Blatt 2

Abgabe im CMS bis Freitag den 3.12.21.

Aufgabe 1

Es seien $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbare Abbildungen auf einem Intervall ($I \subset \mathbb{R}$). Zeigen Sie:

- i) Die Abbildung $\alpha \times \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist differenzierbar mit

$$(\alpha \times \beta)' = \alpha' \times \beta + \alpha \times \beta'.$$

- ii) Gelten mit den Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Beziehungen

$$\alpha' = a\alpha + b\beta \text{ und } \beta' = c\alpha - a\beta,$$

so ist $\alpha \times \beta$ konstant.

- iii) Beweisen Sie für $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ die Identität

$$(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u.$$

Aufgabe 2

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = c^2$ und $a \neq 0$. Betrachten Sie die durch

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, s \mapsto \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), b\frac{s}{c} \right)$$

erklärte parametrisierte Kurve.

- i) Ist γ nach Bogenlänge parametrisiert?
- ii) Berechnen Sie die Krümmung und Torsion von γ .
- iii) Sei $s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass alle Geraden in Richtung des Normalenvektors von $\gamma(s)$, die durch $\gamma(s)$ gehen, die z -Achse unter einem konstanten Winkel schneiden.
- iv) Skizzieren Sie die Kurve γ .

Aufgabe 3

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine beliebig (nicht notwendig nach der Bogenlänge parametrisierte) reguläre Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung. Zeigen Sie, dass das Frenetsche Dreibein $(t_\alpha, n_\alpha, b_\alpha)$ gegeben ist durch

$$t_\alpha = \frac{\alpha'}{|\alpha'|}, \quad n_\alpha = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|} \times \frac{\alpha'}{|\alpha'|}, \quad b_\alpha = \frac{\alpha' \times \alpha''}{|\alpha' \times \alpha''|}.$$

Hinweis:

Parametrisieren Sie die Kurve nach der Bogenlänge und benutzen Sie Aufgabe 1.

Aufgabe 4

- i) Zeigen Sie, dass die orientierte Krümmung einer beliebigen regulären ebenen Kurve $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) gegeben ist durch

$$\kappa_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

- ii) Zeigen Sie, dass die orientierte Krümmung einer regulären ebenen Kurve bei Umorientierung das Vorzeichen wechselt.