Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Bernhard Farquhar

Übungen zur Vorlesung
Differentialgeometrie (WiSe 21/22)
Blatt 3

Abgabe im CMS bis Freitag den 26.12.21.

Aufgabe 1

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ eine regulär parametrisierte Kurve. Zeigen Sie:

i) Schneiden sich alle Normalen der Kurve in einem festen Punkt, so ist ihre Spur Teil einer Kreislinie.

ii) Schneiden sich alle Tangenten der Kurve in einem festen Punkt, so ist ihre Spur Teil einer Geraden. Gilt dies auch ohne die Voraussetzung, dass α regulär ist?

Aufgabe 2

Für $r > 0$ betrachten Sie die Abbildung

$$\gamma\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto r\left(1 + \cos(t), \sin(t), 2\sin\frac{t}{2}\right).$$

Zeigen Sie:

i) Die Kurve γ liegt im Schnitt des Zylinders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ (x-r)^2 + y^2 = r^2\}$ und der Sphäre um den Ursprung vom Radius $2r$.

ii) Bestimmen Sie das Frenetsche Dreibein der Kurve γ.

iii) Berechnen Sie Krümmung und Torsion von γ.

Aufgabe 3

i) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $s_0 \in I$ und $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass durch

$$\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2,\ s \mapsto \int\limits_{s_0}^{s} \cos(\theta(t))\, t + a, \int\limits_{s_0}^{s} \sin(\theta(t))\, t + b$$

mit

$$\theta\colon I \to \mathbb{R},\ s \mapsto \int\limits_{s_0}^{s} \kappa(t)\, t + \varphi$$

eine reguläre nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit κ als orientierter Krümmung erklärt wird und diese Kurve bis auf eine Translation des Vektors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ und eine Drehung des Winkels φ eindeutig bestimmt ist.

ii) Eine sogenannte *Klothoide* ist eine ebene Kurve, die sich dadurch auszeichnet, dass ihre Krümmung an jedem Punkt proportional zu ihrer Bogenlänge bis zu diesem Punkt ist. Bestimmen Sie die reguläre Parametrisierung $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ einer Klothoide mit $\alpha(0) = (0, 0)$ und $\alpha'(0) = (1, 0)$.