

Übungen zur Vorlesung  
Differentialgeometrie (WiSe 21/22)  
Blatt 4

Abgabe im CMS bis Freitag den 14.1.22.

---

**Aufgabe 1**

- i) Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (x(t), y(t))$  eine (nicht notwendig nach Bogenlänge) regulär parametrisierte ebene Kurve. Zeigen Sie: Für den Rotationsindex  $I_\gamma$  von  $\gamma$  gilt:

$$I_\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

- ii) Skizzieren Sie die Spur der folgenden ebenen Kurven und berechnen Sie ihren Rotationsindex:
- a)  $\alpha_n: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (\cos(nt), \sin(nt))$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),
  - b)  $\beta_{a,b}: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (a \cos(t), b \sin(t))$  ( $a, b > 0$ ),
  - c)  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (\cos(t) - \cos(2t), \sin(t) - \sin(2t))$ .

**Aufgabe 2**

Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre parametrisierte Kurve mit nirgends verschwindender Krümmung  $\kappa$ . Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- i) Es gibt einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , sodass  $t \cdot v$  konstant ist.
- ii) Es gibt einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  mit  $n \cdot v \equiv 0$ .
- iii) Es gibt einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  derart, dass  $b \cdot v$  konstant ist.
- iv) Das Verhältnis von Torsion  $\tau$  und Krümmung  $\kappa$  ist konstant.

Eine Kurve, welche einer dieser äquivalenten Bedingungen genügt, heißt *Böschungslinie*.

### Aufgabe 3

Betrachten Sie die Abbildung

$$c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0), & \text{falls } t < 0, \\ (0, 0, 0), & \text{falls } t = 0, \\ (t, 0, e^{-1/t^2}), & \text{falls } t > 0. \end{cases}$$

- i) Zeigen Sie, dass  $c$  eine reguläre differenzierbare ( $c \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ ) Kurve ist.
- ii) Beweisen Sie, dass die Krümmung  $\kappa$  von  $c$  nur auf  $0, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$  verschwindet. Welche geometrische Bedeutung hat die Aussage  $\kappa(0) = 0$ ?
- iii) Zeigen Sie, dass der Grenzwert der Schmiegeebenen von  $c$  bei  $t \downarrow 0$  die Ebene  $\{(x, y, z) ; y = 0\}$  ist, während bei  $t \uparrow 0$  die Ebene  $\{(x, y, z) ; z = 0\}$  approximiert wird. Was bedeutet dies für die Torsion?

### Aufgabe 4

Es seien  $L > 0$  und  $\alpha: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine ebene, nach Bogenlänge parametrisierte einfach geschlossene Kurve. Für ihre orientierte Krümmung  $\kappa$  gelte  $0 < \kappa(s) \leq c$  für alle  $s \in [0, L]$  mit einer Konstanten  $c$ . Zeigen Sie: Für die Länge  $L$  der Kurve gilt

$$L \geq \frac{2\pi}{c}.$$

Was bedeutet das anschaulich?