Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jens Horn, M.Sc.

Minimalflächen (WS 2022/23)
Blatt 1

Aufgabe 1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offen, beschränkte Menge mit glattem Rand. Man beweise mit dem Satz von Gauß:

$$\int_\Omega \Delta u \, \eta \, \mathrm{d}\lambda = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \eta \, \mathrm{d}\lambda$$

für alle $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und $\eta \in C_c^1(\Omega)$, wobei λ das Lebesguemaß und $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{ii}$ den Laplaceoperator bezeichnet.

Aufgabe 2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offen, beschränkte Menge mit glattem Rand. Definiere

$$J \colon C^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \ f \mapsto \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, \mathrm{d}\lambda.$$

Seien weiterhin $f \in C^1(\Omega)$ und $\psi \in C_c^1(\Omega)$ so, dass mit

$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \varepsilon \mapsto J(f + \varepsilon\psi)$$

die Bedingung

$$g'(0) = 0$$

gilt. Zeigen Sie:

1. $\int_\Omega (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \cdot \nabla \psi \, \mathrm{d}\lambda = 0$,
2. $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0$.

(*Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Gauß.*)

Aufgabe 3

Finden Sie alle Lösungen der Minimalflächengleichung

$$\left(1 + (\partial_2 f)^2\right) \partial_{11} f - \partial_1 f \partial_2 f \partial_{12} f + \left(1 + (\partial_1 f)^2\right) \partial_{22} f = 0,$$

die die Gestalt $f(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)$ haben und $f(0,0) = 0$ sowie $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$ erfüllen. Die Fläche heißt *erste Scherk-Fläche*. Zeigen Sie dazu zunächst, dass φ' und ψ' Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\lambda' = c(1 + \lambda^2) \quad (c \in \mathbb{R})$$

sind.