

Minimalflächen (WS 2022/23)
Blatt 5

Hinweis: Man vergleiche §3 im Minimalflächenskript.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge der komplexen Ebene \mathbb{C} und $z_0 \in U$. Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar in z_0* , falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert, wobei $h \in \mathbb{C}$. Man bezeichnet obigen Grenzwert dann als $f'(z_0)$. Die Funktion f heißt *holomorph in z_0* , falls eine Umgebung von z_0 existiert, in welcher f komplex differenzierbar ist. Man nennt f auf U *holomorph*, wenn $f'(z)$ für alle $z \in U$ existiert.

Im nachfolgenden Satz stellen wir einen Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit heraus:

Satz 0.1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in U$. Dann sind für eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) f ist komplex differenzierbar in z_0 .
- (ii) f ist im reellen Sinne total differenzierbar in z_0 und es gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen, d.h.

$$\begin{aligned}\partial_1 \operatorname{Re}(f)(z_0) &= \partial_2 \operatorname{Im}(f)(z_0), \\ \partial_1 \operatorname{Im}(f)(z_0) &= -\partial_2 \operatorname{Re}(f)(z_0).\end{aligned}$$

Ferner beweist man in der Vorlesung den sogenannten Riemannschen Hebbarkeitsth., welcher besagt, dass eine Singularität einer holomorphen Funktion genau dann behoben bzw. entfernt werden kann, wenn ein Gebiet um diese Singularität existiert, auf welchem die holomorphe Funktion beschränkt ist. Wir nennen eine solche Singularität *hebbar*.

Satz 0.2. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in G$ und $f: G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Für ein $r > 0$ sei f beschränkt auf $\overline{D_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$, d.h.

$$\sup_{0 < |z - z_0| \leq r} |f(z)| < \infty$$

Dann gibt es eine eindeutige bestimmte holomorphe Funktion $\tilde{f}: G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \tilde{f}(z)$ für alle $z \neq z_0$.

Schließlich führen wir noch den Begriff der meromorphen Funktion ein. Dazu sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $P \subset U$ diskret, d.h. ohne Häufungspunkt in U . f heißt *meromorph auf*

U genau dann, wenn f holomorph auf $U \setminus P$ ist und die Punkte aus P Polstellen von f sind. Dabei ist ein Punkt z_0 ein Pol der Ordnung n ($n \in \mathbb{N}$) von f genau dann, wenn reelle Zahlen $0 < M_1 < M_2 < \infty$ existieren mit

$$M_1|z - z_0|^{-n} \leq |f(z)| \leq M_2|z - z_0|^{-n}$$

für $z \neq z_0$ nahe z_0 .

Übung 1.

Sei $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^2 -Funktion. Wir setzen

$$\phi_k(z) = \partial_1 F^k(z) - i\partial_2 F^k(z)$$

für $k \in \{1, 2, 3\}$ und $z = x + iy = (x, y) \in \Omega$. Wiederholen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) ϕ_k ist holomorph auf Ω für $k \in \{1, 2, 3\}$ genau dann, wenn $\Delta F \equiv 0$.
- (ii) F ist konform, d.h. $|\partial_1 F| = |\partial_2 F|$ und $\partial_1 F \cdot \partial_2 F = 0$, genau dann, wenn $\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 \equiv 0$.
- (iii) Sei F konform. Dann ist $\text{Rang } DF(z) = 2$ für alle $z \in \Omega$ genau dann, wenn $\sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 > 0$ für alle $z \in \Omega$.

Übung 2.

Wiederholen Sie:

- (i) Sei $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ meromorph und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit der Eigenschaft: Hat g in z einen Pol der Ordnung m , soll f in z eine Nullstelle der Ordnung $n \geq 2m$ haben. Dann sind die Funktionen

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2) \quad \text{und} \quad \phi_3 = fg$$

holomorph in Ω und lösen

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 \equiv 0. \tag{*}$$

- (ii) Seien ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 Lösungen von (*), für welche *nicht*

$$\phi_1 = i\phi_2, \quad \phi_3 = 0$$

ist, so findet man f und g wie in (i) beschrieben.

Übung 3.

Konstruieren Sie mit Hilfe von Aufgabe 1 und 2 eine Minimalfläche durch

$$f(z) = z^4, \quad g(z) = \frac{1}{z^2}.$$