

Minimalflächen

M. Fuchs

WS 20/21

Literatur :

* R. Osserman : A survey of minimal surfaces. Van Nostrand 1969
(benötigt keine Vorkenntnisse aus der Differentialgeometrie oder Theorie der partiellen Differentialgleichungen)

B. Lawson : Lectures on minimal submanifolds. Publish or Perish 1980.
(als Übersicht für Interessenten mit geometrischen Vorkenntnissen empfohlen)

R. Courant : Dirichlet's principle, conformal mappings and minimal surfaces.
Springer Verlag.

J.C.C. Nitsche : Vorlesungen über Minimalflächen. Springer Verlag 1974
(schildert auf ~ 800 Seiten den Wissensstand der klassischen Minimalflächen-theorie bezogen etwa auf 1970)

F.J. Almgren : Plateau's problem - an invitation to varifold geometry.
W.A. Benjamin 1966 (hier findet man Zugang zu neueren Entwicklungen in der Minimalflächen-theorie, die ich in meiner Vorlesung "GMT" behandle; das Buch von Almgren ist sehr elementar, enthält viele schöne Bilder und ist zum Selbststudium zu empfehlen)

§ 0 Was sind Minimalflächen? (Vorläufige Definitionen)
 Einiges zur Historie und Einordnung sowie Bezüge
 zu verschiedenen Teildisziplinen der Mathematik.

Unter einer Minimalfläche $S \subset \mathbb{R}^3$ wollen wir vorläufig folgendes
 verstehen.

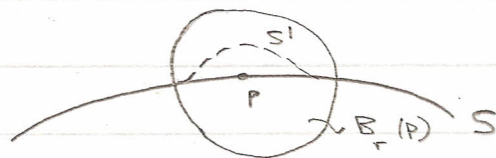
Definition: S ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit (= Fläche) des dreidimensionalen euklidischen Raums $\mathbb{R}^3$, die den Flächeninhalt lokal minimiert.

Das heißt: Wählt man einen Punkt $P \in S$ und dazu eine genügend kleine Kugel $B_r(P) \subset \mathbb{R}^3$ um P , so soll gelten

$$\text{Area}_{B_r(P)}(S) \leq \text{Area}_{B_r(P)}(S')$$

für jede andere Fläche S' , die außerhalb der Kugel $B_r(P)$ mit S übereinstimmt. Hierbei meint

$$\text{Area}_{B_r(P)}(S)$$



dem Flächenanteil von S , der innerhalb der Kugel $B_r(P)$ liegt.
 Wir verzichten hier auf eine exakte Definition des zweidimensionalen Inhalts einer Fläche, diese wird später nachgereicht.

Die Geschichte der Minimalflächen beginnt (vermutlich) 1762 mit J.L. Lagrange, der die folgende heute als Plateau Problem für

Minimalflächen bezeichnet Aufgabenstellung formuliert:

" Gegeben sei eine geschlossene Jordan Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, gesucht ist diejenige Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$, die von Γ berandet wird und unter allen solchen Flächen kleinsten Inhalt hat. "

Lagrange selbst lieferte folgenden Beitrag: Angenommen, das Problem hat eine Lösung S , von der man zusätzlich weiß, dass sie als Graph einer Funktion

$$\mathbb{R}^2 \supset \Omega \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden kann, die über einem ebenen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ erklärt ist, also

$$S = \{ (x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \Omega \}.$$

Dann ist der Flächeninhalt von S gegeben durch

$$J(f) := \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx \, dy.$$

Nun betrachtet man irgendeine Funktion

$$\Psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

die in der Nähe von $\partial\Omega$ verschwindet. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt dann: der Graph S_ε von $(x, y) \mapsto f(x, y) + \varepsilon \Psi(x, y)$ ist eine Fläche mit demselben Rand wie S , so daß aus

$$\text{Area}(S) \leq \text{Area}(S_\varepsilon)$$

sofort auch

$$J(f) \leq J(f + \varepsilon \cdot \psi)$$

folgt, insbesondere natürlich

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(f + \varepsilon \cdot \psi) = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich schreiben als

$$\int_{\Omega} (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \cdot \nabla \psi \, dx \, dy = 0$$

und führt nach partieller Integration wegen der Beliebigkeit von ψ auf die

Minimalflächengleichung in Graphenform

$$\text{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0 \quad \text{auf } \Omega.$$

(0.1)

Lagrange behandelte also das Plateau Problem vom Standpunkt der

Variationsrechnung: man schränkt zunächst den Flächenbegriff auf eine überschaubare Teilklasse nämlich die Graphen ein und unterstellt, daß es in dieser Teilklasse Lösungen gibt. Für Graphen läßt sich der Flächeninhalt in einfacher Weise als Doppelintegral ("Variations-

"integral") aufschreiben und die Minimalität liefert als notwendige Bedingung das Verschwinden der 1^{ten} Variation, und man bekommt folgendes

SATZ: Wenn das Plateau Problem lösbar ist und die Lösung zudem noch Graphenform hat, so erfüllt die dem Graphen erzeugende Funktion die partielle Differentialgleichung (0.1).

Hier werden in §1 die Schlußweise von Lagrange ausführlich diskutieren und eine genaue Herleitung von (0.1) geben.

Lagrange selbst hat sich nicht weiter mit dem Plateau Problem beschäftigt, vielmehr ging es ihm wohl nur darum, mit diesem Beispiel die Macht des neuen Kalküls "Variationsrechnung" zu demonstrieren.

Allerdings ist eine explizite Lösung von (0.1) schon rund zwanzig Jahre vor Lagrange von Euler (um 1744) beschrieben worden. Euler stellte fest, daß die Kettenlinie bei der Rotation um ihre Achse eine Fläche kleinsten Inhalts erzeugt (das Katenoid). Außerdem bewies Euler (mehr oder weniger), daß die Gültigkeit von (0.1) äquivalent ist zum Verschwinden der mittleren Krümmung H der Fläche S . Diese Beobachtung führt uns direkt in die Differentialgeometrie, nämlich auf das Studium von Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung. Bezüglich der Notation sei schon hier eine Warnung ausgesprochen: aufgrund der historischen Entwicklung nennt man auch Flächen mit $H \equiv 0$ oftmals Minimalflächen - das Verschwinden von H ist lediglich notwendig, aber keineswegs hinreichend für Minimalität bzgl. des Flächeninhalts.

Nach Euler und Lagrange findet man Beiträge von

Bonnet, Riemann, Weierstraß, Enneper, Schwarz,
Weingarten, Beltrami, Scherk u. v. a.,

die sich um das Auffinden von speziellen Lösungen zu (0.1) und das Studium der Geometrie der expliziten Lösungen bemühten. Besonders erwähnenswert erscheinen mir die Weierstraß'schen Darstellungsfarmeln für Minimalflächen, die auf funktionentheoretischen Methoden beruhen.

Mit diesen Ergebnissen war man der Lösung des Plateau'schen Problems - also der Findung flächenminimaler Objekte zur gegebenen Berandung - noch nicht näher gekommen, erst Plateau (belgische Physiker, 1801 - 1883) liefert experimentelle Ergebnisse: formt man etwa die Randkurve Γ aus sehr dünnem Draht und taucht dieses Gebilde in Seifenlauge, so zeigen Plateau's Untersuchungen zum Phänomen der Oberflächenspannung, daß der sich dann einstellende Seifenfilm eine Minimalfläche realisiert. Aufgrund dieser Experimente äußerte Plateau die von Geometern gestützte Vermutung, daß es zu jeder geschlossenen Jordankurve Γ eine eingespannte Minimalfläche geben muß.

Ein systematischer Zugang mit mathematisch exakten Methoden beginnt 1930 mit den Arbeiten von J. Douglas, T. Radó, R. Courant, die sich den Minimalflächen vom Typ der Kreisscheibe widmeten:

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ die 1-Kreisscheibe und $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ differenzierbares Bild der Kreislinie ∂D . Eine Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit Rand Γ heißt vom Typ der Kreisscheibe, falls es eine reguläre Abbildung $F: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt mit

$$S = \overline{F(D)}, \quad F(\partial D) = \Gamma.$$

Hierbei setzt man F als global injektiv voraus und verlangt, daß DF in jedem Punkt den maximal möglichen Rang 2 hat. Setzt man die Parametrisierung F auch noch als konform voraus, d.h.

$$\partial_1 F \cdot \partial_2 F = 0, \quad |\partial_1 F| = |\partial_2 F|,$$

so folgt für den Flächeninhalt $A(F)$ des Bildes von F

$$A(F) = \frac{1}{2} \int_D |DF|^2 dx dy,$$

d.h. der Flächeninhalt ist (bis auf den Faktor $1/2$) das Dirichlet'sche Integral von F . Das Plateau Problem in diesem Rahmen hat dann folgende Formulierung:

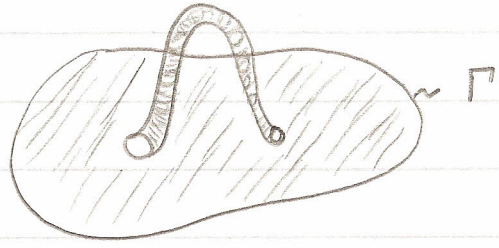
"Zur Randbedingung $F(\partial D) = \Gamma$ suche man eine konform parametrisierte Fläche $\text{Bild}(F)$, wo F das Dirichlet-Integral minimiert."

Neben Courant, Douglas, Rado haben u.a. Meierbrandt, Heinz, Nitsche an der vollständigen Lösung mitgewirkt, und eine befriedigende Lösung erfolgte erst in den 60er und 70er Jahren unseres Jahrhunderts, wobei gleichzeitig einschränkend anzumerken ist, daß immer noch viele Detailfragen offen sind.

Die Suche nach Minimalflächen vom Typ der Weierstraßsche ist natürlich ein scheinbar allgemeiner Lösungsansatz als sich nur auf Graphenflächen zu beschränken, aber selbst wenn man eine Lösung vom D-Typ gefunden hat, bleibt offen, ob dies tatsächlich das Flächenminimum unter allen

zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Rand Γ ist. Tatsächlich könnte ja das Flächenminimum so aussehen:

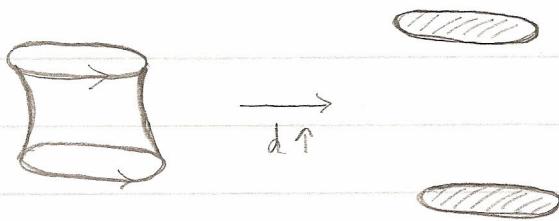
Die gezeichnete Fläche mit dem angesetzten Henkel ist nicht einfach zusammenhängend und deshalb nicht vom Typ D.



Wir sehen daraus, daß die klassischen Methoden, d.h. die Beschränkung der zur Diskussion stehenden Flächen auf einen fixierten Typ (Graph oder Kreisscheibe, etc.) nicht in jedem Fall auf das absolute Flächenminimum führen muß, man bekommt vielmehr nur Flächen mit mittlerer Krümmung $H \equiv 0$, die nur in Spezialfällen absolut minimieren.

Daß die Vorgabe des topologischen Typs i.a. unrealistisch ist, zeigt in einfacher Weise das folgende

Beispiel: Die Randkurve Γ bestehe aus 2 koaxialen Kreislinien $\subset \mathbb{R}^3$ im Abstand d . Dann läßt sich zeigen: für $d < d_0$ ist die Minimalfläche zum Rand Γ das Katenoid, für $d > d_0$ bekommt man als Lösung die Vereinigung der beiden zu Γ gehörenden Kreisscheiben:



Um die mit der Vorgabe einer Parametrisierung zusammenhängenden Probleme auszuräumen, haben Feder - Fleming Anfang der 60er

die sogenannte Geometrische Maßtheorie als neue Teildisziplin entwickelt, wo das Plateau Problem als rein geometrische Variationsaufgabe in Klassen verallgemeinerter Mannigfaltigkeiten ohne Vorgabe einer Parametrisierung formuliert und gelöst werden kann, man vergleiche dazu etwa Almgren's Buch. Der GMT - Zugang ist Gegenstand einer eigenen Vorlesung, wir wollen uns hier mehr oder weniger mit dem Studium der Minimalflächen in Graphenform begnügen und einige bekannte Sätze beweisen. Aus dem bisher Gesagten geht hervor, daß die Minimalflächentheorie Beziehungen hat zur

Differentialgeometrie, Variationsrechnung,
Theorie der partiellen Differentialgleichungen
und Funktionentheorie.

Da Spezialkenntnisse aus diesen Gebieten nicht vorausgesetzt werden, geht es in dem ersten Abschnitt um die Vorbereitung einiger Begriffe. Danach geben wir eine Herleitung von (0.1) und beschäftigen uns dann mit den Eigenschaften von Lösungen zu (0.1). Im letzten Teil dieser ersten Vorlesung geht es um die Frage, wie man Lösungen zu (0.1) erzeugt.

§ 1 Graphenminimalflächen in $\mathbb{R}^3$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, deren Graph $\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \Omega\}$ wir mit G_f bezeichnen wollen. G_f ist eine Fläche (= 2-dim. Mannigfaltigkeit $\subset \mathbb{R}^3$), deren Inhalt durch die Formel

$$(1.1) \quad A_{\Omega}(f) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx \, dy$$

gegeben ist. Hierbei steht $\nabla f(x, y)$ für den Vektor mit den Komponenten

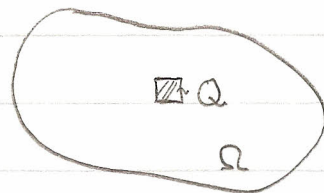
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right).$$

Die Formel (1.1) läßt sich auf zwei Wegen ansehen: entweder man nimmt (1.1) einfach als Definition für den Flächeninhalt eines Graphen (schlecht, da nicht motiviert) oder man definiert auf $\mathbb{R}^3$ ein zweidimensionales geometrisches Maß (das Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^2$) und zeigt, daß das Maß eines Graphen gerade durch die rechte Seite von (1.1) gegeben wird. (das läuft auf eine Transformationsformel für das Oberflächenmaß hinaus) Wir gehen einen Mittelweg, indem wir uns überlegen, daß

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx \, dy$$

den Flächeninhalt des Graphen vernünftig wiedergibt:

Sei Q ein kleines Quadrat in Ω mit Mittelpunkt a . Auf Q können wir $f(z)$ näherungsweise ersetzen durch



die affine Funktion

$$l(z) := f(a) + \nabla f(a) \cdot (z - a),$$

wobei $z := (x, y)$ abgekürzt worden ist. Es folgt in guter Näherung

$$A_Q(f) = A_Q(l),$$

d.h. die Fläche von G_f über Q entspricht in etwa der Fläche des Graphen von l über Q .

Wie groß ist nun $A_Q(l)$ bzw. welchen Wert wird man als sinnvolle Definition von $A_Q(l)$ ansehen?

Es ist

$$\{(z, l(z)) : z \in Q\} = \left\{ \overbrace{(z, z \cdot \nabla f(a))}^{=: L(z)} + \overbrace{(0, f(a) - a \cdot \nabla f(a))}^{=: L_0} : z \in Q \right\}$$

mit einer linearen Funktion $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und einem konstanten Vektor $L_0 \in \mathbb{R}^3$, d.h.

$$\text{Graph}(l|_Q) = L(Q) + L_0.$$

Die Verschiebung L_0 sollte am zu definierenden Flächeninhalt von

$\text{Graph}(l|_Q)$ nichts ändern, so daß wir letztendlich darauf geführt werden, der Menge $L(Q)$ einen Flächeninhalt zuzuordnen.

Dazu nehmen wir an, daß Q achsenparallel ist und die linke untere Ecke gerade im Ursprung liegt. Dann ist

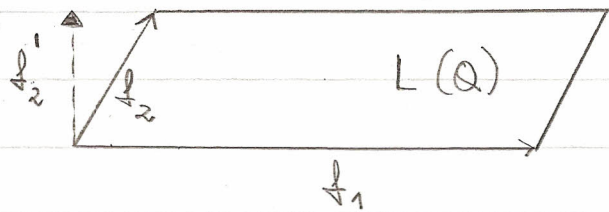
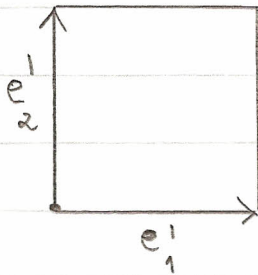
$$Q = \{ s \cdot e_1 + t \cdot e_2 : 0 \leq s, t \leq \varepsilon \},$$

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (0, 1), \quad \varepsilon = \text{Kantenlänge von } Q,$$

und

$$\begin{aligned} L(Q) &= \{ s \cdot L(e_1) + t \cdot L(e_2) : 0 \leq s, t \leq \varepsilon \} \\ &= \{ s \cdot L(e'_1) + t \cdot L(e'_2) : 0 \leq s, t \leq 1 \}, \end{aligned}$$

$$e'_1 := \varepsilon \cdot e_1, \quad e'_2 := \varepsilon \cdot e_2.$$



$L(Q)$ ist das von f_1, f_2 ($f_i := L(e'_i)$) aufgespannte Parallelogramm in der Ebene

$$E = \{ (-\nabla f(a), 1) \}^\perp.$$

Bezeichnet f'_2 die orthogonale Projektion von f_2 auf das orthogonale Komplement von f_1 in E , so gilt bekanntlich

$$\text{Inhalt von } L(Q) = |f_1| \cdot |f_2'|.$$

Mit

$$f_2' = f_2 - \left(f_2 \cdot \frac{f_1}{|f_1|} \right) \frac{f_1}{|f_1|}$$

folgt:

$$\begin{aligned} |f_1| \cdot |f_2'| &= \left| |f_1| \cdot f_2 - \left(f_2 \cdot \frac{f_1}{|f_1|} \right) f_1 \right| = \\ &= \left(|f_1|^2 \cdot |f_2|^2 - 2 \cdot (f_1 \cdot f_2)^2 + (f_1 \cdot f_2)^2 \right)^{1/2} = \\ &= \left(|f_1|^2 \cdot |f_2|^2 - (f_1 \cdot f_2)^2 \right)^{1/2} = \\ &= \varepsilon^2 \cdot \left(|L(e_1)|^2 |L(e_2)|^2 - (L(e_1) \cdot L(e_2))^2 \right)^{1/2} = \\ &= \varepsilon^2 \cdot \left((1 + |\partial_1 f(a)|^2) \cdot (1 + |\partial_2 f(a)|^2) - (\partial_1 f \cdot \partial_2 f)^2(a) \right)^{1/2} = \\ &= \varepsilon^2 \sqrt{1 + |\nabla f(a)|^2}, \end{aligned}$$

deshalb gilt in guter Näherung

$$A_Q(f) \approx \sqrt{1 + |\nabla f(a)|^2} \cdot \text{Inhalt von } Q.$$

Anschaulich ist klar, daß

$$A_\Omega(f) \approx A_{\cup Q_i}(f)$$

richtig ist, wenn man Ω durch Quadrate Q_i approximiert, also

$$A_{\Omega}(f) \approx \sum_i \sqrt{1+|\nabla f(a_i)|^2} \cdot \text{Inhalt von } Q_i$$

$$\longrightarrow \int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla f|^2} \, dx \, dy$$

bei wachsender Güte der Zerlegung von Ω in achsenparallele Quadrate.

Vermöge der vorstehenden Rechnung haben wir erkannt, daß

$$A_{\Omega}(f) = \int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla f|^2} \, dx \, dy$$

ein vernünftiger Ausdruck für die Fläche von G_f ist. Es sei ausdrücklich betont, daß $A_{\Omega}(f)$ durchaus $= \infty$ sein kann. Die Endlichkeit von $A_f(\Omega)$ ist zum Beispiel dann gesichert, wenn sowohl Ω als auch ∇f als beschränkt vorausgesetzt werden.

Nachfolgend sei f von der Klasse $C^2(\Omega)$. γ bezeichne eine C^2 -Funktion $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\text{spt } \gamma := \overline{\{z \in \Omega : \gamma(z) \neq 0\}}$$

$$\subset D_r(z_0) := \{z \in \mathbb{R}^2 : |z - z_0| < r\}$$

für einen Punkt $z_0 \in \Omega$ und einen kleinen Radius r , so daß die offene Kreisscheibe noch ganz in Ω enthalten ist.

Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}$ beliebig, so unterscheiden sich die Graphen G_f und

$G_{f+\varepsilon \cdot g}$ höchstens außerhalb des Zylinders $D_r(z_0) \times \mathbb{R}$,

und wenn G_f lokal den Flächeninhalt unter allen Graphen über Ω minimiert, folgt

$$A_{D_r(x_0)}(f) \leq A_{D_r(x_0)}(f + \varepsilon \cdot g) \implies$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_{D_r(x_0)} (1 + |\nabla f + \varepsilon \cdot \nabla g|^2)^{1/2} dx dy = 0,$$

was nach Differentiation unter dem Integralzeichen äquivalent ist zu

$$0 = \int_{D_r(x_0)} (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \cdot \nabla g \, dx dy.$$

Schreibt man

$$(1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \cdot \nabla g =$$

$$\operatorname{div} \left((1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \cdot g \right) - \operatorname{div} \left((1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \right) \cdot g$$

und beachtet

$$\int_{D_r(x_0)} \operatorname{div} \left((1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \cdot g \right) dx dy = 0$$

nach dem Satz von Gauß (g verschwindet ja auf $\partial D_r(x_0)$),

so gilt

$$0 = \int_{D_r(x_0)} y \cdot \operatorname{div} \left((1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \right) dx dy$$

für jede Funktion y mit Träger in $D_r(x_0)$. Dies ist aber nur dann möglich, wenn die Größe

$$\operatorname{div} \left((1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \right)$$

auf $D_r(x_0)$ verschwindet. Da im Falle der lokalen Minimalität dies für jede Kreisscheibe $D_r(x_0)$ richtig sein muß, ist bewiesen

SATZ 1.1: Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion mit

$$A_{\Omega'}(f) \leq A_{\Omega'}(g)$$

für jedes kompakt in Ω enthaltene Teilgebiet Ω' und jede C^2 -Funktion $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp}(f-g) \subset \Omega'$. Dann löst f die sogenannte

explizite (oder nicht-parametrische) Minimalflächengleichung

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0.$$

steht Δf für den Laplace-Operator

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f$$

so läßt sich die explizite Minimalflächengleichung auch schreiben als

$$(1 + |\nabla f|^2) \cdot \Delta f = D^2 f (\nabla f, \nabla f),$$

wo $D^2 f (\nabla f, \nabla f)$ die Anwendung der symmetrischen Bilinearform $D^2 f$ auf das Paar $(\nabla f, \nabla f)$ bedeutet.

Ausgeschrieben lautet das Ergebnis:

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

und man sieht, daß es sich um eine nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt.

Wie wir im nächsten § zu sehen werden, bedeutet die nichtparametrische Minimalflächengleichung geometrisch, daß G_f eine Fläche mit verschwindender mittlerer Krümmung H ist. Im Falle von allgemeinen Flächen $S \subset \mathbb{R}^3$ bedeutet $H \equiv 0$ keineswegs, daß S den Flächeninhalt zu seinem Rand minimiert. (Das ist wie in der gewöhnlichen Extremwertrechnung: das Verschwinden der Ableitung garantiert noch nicht, daß man eine Minimalstelle gefunden hat.) Anders verhält es sich, wenn man die zusätzliche Information hat, daß die betrachtete Fläche S ein Graph ist, d.h.:

f löst die nichtparametrische Minimalflächengleichung $\implies$

Fläche $G_f \leq$ Flächeninhalt einer beliebigen α Mkt. S mit Rand $G_{f|_{\partial \Omega}}$
und $S \subset \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$

Genaues gilt

SATZ 1.2: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$ und $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung. Ferner bezeichne M eine C^2 -Mannigfaltigkeit mit

a) $M \subset \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ und

b) $\partial M = G_{f|_{\partial\Omega}}$

Dann gilt: $A_{\Omega}(f) \leq \text{Flächeninhalt von } M.$

KOROLLAR: Ist f wie oben und $g \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit $g = f$ auf $\partial\Omega$, so folgt

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx \, dy \leq \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla g|^2} \, dx \, dy.$$

Bemerkung: Ist Ω nicht konvex, so findet man unter Umständen zwei-dimensionale Mannigfaltigkeiten M mit

$$\partial M = G_{f|_{\partial\Omega}}$$

und $M \not\subset \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$, für die

$$\text{Flächeninhalt von } M < A_{\Omega}(f)$$

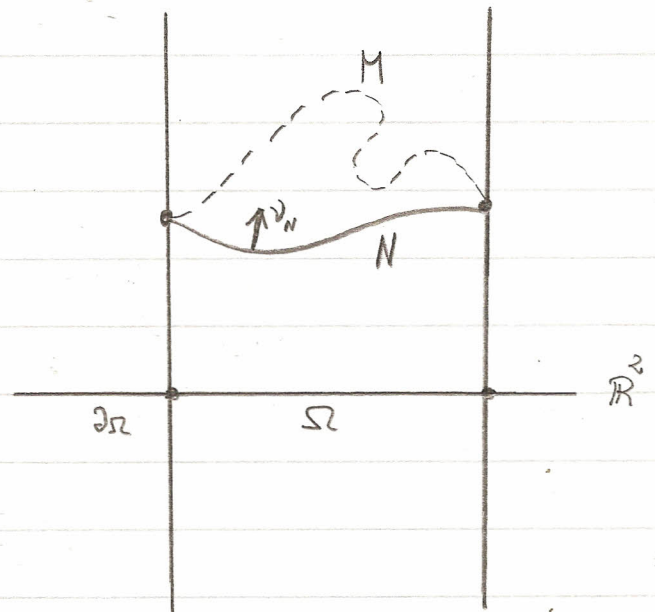
ist. Satz 1.2 bezieht sich deshalb also nur auf Vergleichsmannigfaltigkeiten M , die innerhalb des Zylinders $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ gelegen sind.

Zum Beweis von Satz 1.2: Zunächst stehen wir vor dem technischen Problem, den Flächeninhalt $A(M)$ einer 2-Mannigfaltigkeit erklären zu müssen. Da diese Einheiten zu weit führen würden ($\rightarrow$ vgl. GMT Vorlesung), sollte man entweder auf alte Analysiskenntnisse zurückgreifen ("Oberflächenmaß") oder so argumentieren: für Graphen haben wir uns eine Inhaltsformel überlegt und kennen damit auch den Inhalt von Flächen, die durch Rotation und Translation aus Graphen erzeugt werden. Jede Mannigfaltigkeit M setzt sich aber aus abzählbar vielen Stücken zusammen, die isometrisch zu gewöhnlichen Graphen sind. Durch Zusammensetzen bekommt man schließlich eine Definition für $A(M)$. Um wenigstens einen Eindruck von der Beweisidee zu bekommen, setzen wir $N = G_f$ und stellen uns die Situation wie nebenstehend gezeichnet vor:

Sind x, y wie üblich die Variablen in $\mathbb{R}^2$ und bezeichnet z die noch fehlende Ortskoordinate aus $\mathbb{R}^3$, so ist

$$\nu_N(x, y) := (-\nabla f(x, y), 1) / \sqrt{1 + |\nabla f(x, y)|^2}$$

in jedem Punkt $(x, y) \in \overline{\Omega}$ ein Vektor senkrecht zu N im Punkt $(x, y, f(x, y))$.



Durch die Setzung $F(x, y, z) := \nu_N(x, y)$ gewinnen wir ein Vektorfeld auf dem ganzen Zylinder $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$.

Steht "div" für den Divergenzoperator auf $\mathbb{R}^3$, so folgt:

f erfüllt die nichtparametrische Minimalflächengleichung $\iff$

$$\operatorname{div} F = 0 \quad \text{auf } \Omega \times \mathbb{R},$$

und man findet deshalb ein Vektorfeld Φ auf $\Omega \times \mathbb{R}$ mit

$$F = \operatorname{rot} \Phi.$$

Man bekommt:

$$|A(N)| = \int_N 1 \cdot d\sigma \quad \begin{array}{l} \nwarrow \text{"Integration nach dem Oberflächenmaß"} \\ \nearrow \end{array} \quad \begin{array}{l} = \\ \uparrow \\ F = \nu_N \text{ auf } N \end{array}$$

$$\int_N F \cdot \nu_N \, d\theta = \int_N \operatorname{rot} \Phi \cdot \nu_N \, d\theta$$

$$= \left(\text{"Satz v. Stokes", } \tau_N = \text{Tangentenfeld am } \partial N \right) =$$

$$\int_{\partial N} \Phi \cdot \tau_N \, ds \quad (ds = \text{Linienintegration}) =$$

$$\int_{\partial M} \Phi \cdot \tau_M \, ds = (\text{Stokes}) = \int_M \operatorname{rot} \Phi \cdot \nu_M \, d\theta =$$

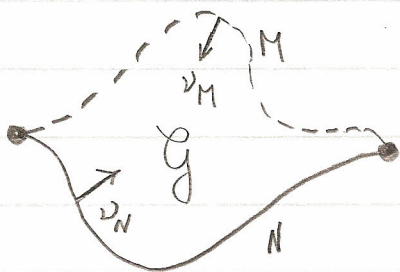
$$\int_M F \cdot \nu_M \, d\theta \leq \int_M 1 \cdot d\theta = A(M),$$

$$\text{denn } |F \cdot \nu_M| \leq |F| \cdot |\nu_M| = |F| = 1.$$

Dabei haben wir unterstellt, daß die Vergleichsfläche M orientiert ist, was die Existenz des Normalenfeldes ν_M impliziert.

Wenn man auf Stokes verzichten möchte, läßt sich der Beweis auch mit dem Satz von Gauß führen, wobei allerdings auch wieder an die Anschauung appelliert werden muß: wir unterstellen, daß M und N Rand eines Gebietes G sind und daß sich der Gauß-Satz auf G anwenden läßt.

Mit den Notationen von oben ist



$$0 = \int_G \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$$

$$= \int_{\partial G} F \cdot \nu_G \, d\sigma =$$

$$\int_N F \cdot \nu_N \, d\sigma + \int_M F \cdot \nu_M \, d\sigma =$$

$$A(N) + \int_M F \cdot \nu_M \, d\sigma.$$

Gemäß $F \cdot \nu_M \geq -1$ auf M folgt

$$0 \geq A(N) - A(M)$$

wie gewünscht. Die Minimalflächengleichung ist hier wieder nur in der Form $\operatorname{div} F = 0$ eingegangen. ■

Bis jetzt haben wir noch keine Minimalfläche explizit konstruiert. Unser Fernziel ist natürlich die Lösung des

Plateau Problems für Graphenminimalflächen : Zu einer Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, die Graph über dem Rand $\partial\Omega$ eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist, finde man $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\textcircled{1} \quad \Gamma = \text{Graph}(f|_{\partial\Omega})$$

$$\textcircled{2} \quad A_{\Omega}(f) \leq A_{\Omega}(g) \quad \text{für alle } g \text{ mit derselben Randbedingung.}$$

Anschaulich würde man so vorgehen: man wählt eine (Minimal-) Folge f_n mit

$$A(f_n) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f_n|^2} \, dx \, dy$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf_g A$$

(das Infimum wird über alle zulässigen g gebildet)

in der Hoffnung, aus $\{f_n\}$ eine konvergente Teilfolge auswählen zu können, die natürlich gegen die gesuchte Lösung konvergieren sollte. Dieser Zugang mit Variationsmethoden ist jedoch mit erheblichem Aufwand verbunden, so daß wir zunächst dem historischen Weg folgen und durch spezielle Ansätze Lösungen der nichtparametrischen Minimalflächengleichung bringen.

Wir suchen also Funktionen $f: \text{Teilgebiet von } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

1. Die Ebenen: Für $A \in \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$l(x, y) := A \cdot (x, y) + a,$$

also die allgemeine affin lineare Funktion auf $\mathbb{R}^2$, deren Graph G_l eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ darstellt. Natürlich ist l Lösung und ein tiefer auf Bernstein zurückgehender Satz besagt, daß l auch die einzige ganze (= auf der ganzen Ebene definierte) Lösung der Minimalflächen-gleichung ist. Das werden wir später beweisen.

2. Die 1^{te} Scherk'sche Fläche:

Man sucht Lösungen f der Form

$$f(x, y) = \varphi(x) + \Psi(y)$$

mit noch zu bestimmenden reellen Funktionen von einer reellen Variablen.

Die Minimalflächen-gleichung reduziert sich auf

$$(1 + \Psi'(y)^2) \cdot \varphi''(x) + (1 + \varphi'(x)^2) \cdot \Psi''(y) = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\varphi''(x) / (1 + \varphi'(x)^2) = - \Psi''(y) / (1 + \Psi'(y)^2)$$

Da die linke Seite nur von x , die rechte nur von y abhängt, folgt die Konstanz der Ausdrücke, so daß wir die gewöhnliche Differential-gleichung

$$\rho'' = c \cdot (1 + (\rho')^2)$$

zu lösen haben. Mit $\lambda := \rho'$ ist

$$\lambda' = c \cdot (1 + \lambda^2),$$

und unter Beachtung von $\frac{d}{dt} \arctan t = \frac{1}{1+t^2}$ folgt

$$(\arctan \lambda)' = c \implies$$

$$\lambda(t) = \tan(c \cdot t + c_1).$$

Integriert man λ und kehrt zurück zu $f(x, y) = g(x) + \gamma(y)$, so bekommt man die allgemeine Lösung

$$f(x, y) = \frac{1}{a} \log \left(\cos a \cdot (x - x_0) / \cos a \cdot (y - y_0) \right) + C$$

mit $C \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Die durch

$$f(x, y) = \log(\cos x / \cos y)$$

gekürzte Fläche heißt Scherk's erste Fläche. Als möglichen Definitionsbereich findet man das Schachbrett

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - k \cdot \pi| < \pi/2, |y - l \cdot \pi| < \pi/2, k+l \text{ gerade}\}.$$

3. Der Ansatz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv 0$$

führt auf die Bestimmungsgleichung

$$f(x, y) = a \cdot x \cdot g(y) + \Psi(y)$$

mit reellen Funktionen g, Ψ einer reellen Variablen und $a \in \mathbb{R}$. Ist $a = 0$, also

$$f(x, y) = \Psi(y),$$

so reduziert sich die Minimalflächengleichung auf $\Psi'' \equiv 0$, d.h.

$$f(x, y) = c_1 \cdot y + c_2,$$

und den Fall aff. linear f haben wir schon unter 1. beschrieben. Sei deshalb $a \neq 0$. Dann ist die Minimalflächengleichung äquivalent zu

$$(1 + a^2 \cdot g^2(y)) \cdot (a \cdot x \cdot g''(y) + \Psi''(y)) =$$

$$2 \cdot a \cdot g(y) \cdot (a \cdot x \cdot g'(y) + \Psi'(y)) \cdot a \cdot g'(y) \iff$$

$$\Psi''(y) \cdot (1 + a^2 g^2(y)) + x \cdot \{ a \cdot g''(y) (1 + a^2 g^2(y)) \} =$$

$$2 \cdot a^2 \cdot g(y) \cdot g'(y) \cdot \Psi'(y) + x \cdot \{ 2 \cdot a^3 \cdot g(y) \cdot g'(y)^2 \},$$

und Koeffizientenvergleich ergibt

$$i) \quad 2 \cdot a^2 \cdot g(y) \cdot g'(y) \cdot \Psi'(y) = (1 + a^2 \cdot g^2(y)) \cdot \Psi''(y)$$

$$ii) \quad 2 \cdot a^3 \cdot g(y) \cdot g'(y)^2 = (1 + a^2 \cdot g^2(y)) \cdot a \cdot g''(y).$$

bew. (wenn ψ', φ' ihre Nullstellen sind)

$$i)^* \quad \psi''/\psi' = 2 a^2 \cdot \varphi' \cdot \varphi / (1 + a^2 \cdot \varphi^2)$$

$$ii)^* \quad \varphi''/\varphi' = 2 \cdot a^2 \cdot \varphi' \cdot \varphi / (1 + a^2 \cdot \varphi^2) .$$

Man rechnet nun nach, daß $ii)^*$ umgeformt werden kann in

$$(iii) \quad 0 = \left(\frac{\varphi'}{a^2 \cdot \varphi^2 + 1} \right)' .$$

Wir sehen die Lösungen von (iii) aus?

$$\frac{\varphi'}{a^2 \cdot \varphi^2 + 1} = b \in \mathbb{R}$$

$$= \left\{ \frac{1}{a} \cdot \arctan(a \cdot \varphi) \right\}'$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a} \cdot \arctan(a \cdot \varphi) \right)' = b, \quad \text{d.h.}$$

$$\frac{1}{a} \cdot \arctan(a \cdot \varphi(y)) = b \cdot y + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \text{oder}$$

$$a \cdot \varphi(y) = \tan(a \cdot b \cdot y + a \cdot c).$$

Nun sind b, c beliebige reelle Konstanten, so daß wir $a \cdot b, a \cdot c$ wieder mit b und c bezeichnen dürfen und für die allgemeine Lösung von $ii)^*$ bzw. $iii)$ den Ausdruck

$$J(y) = \frac{1}{a} \cdot \tan(b \cdot y + c)$$

halten. Gleichzeitig liefern $i)^*$ und $ii)^*$ durch Gleichsetzen

$$\Psi''/\Psi' = J''/J'$$

so daß

$$\left(\Psi'/\Psi'\right)' = 0$$

sein muß. Mithin ist

$$\Psi' = c_1 \cdot J'$$

oder $\Psi(y) = c_1 \cdot J(y) + c_2$. Setzt man die Ergebnisse zusammen, so findet man mit Integrationskonstanten $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, x_0, y_0$

$$f(x, y) = \tilde{a} \cdot (x - x_0) \tan(\tilde{b}(y - y_0)) + \tilde{c}$$

der Graph G_f von f stimmt bis auf Streckungen und Verschiebungen mit dem der Funktion

$$(x, y) \rightarrow \alpha \cdot x \cdot \tan y$$

überein.

4. Von Scherk stammt der Ansatz, Graphen minimalflächen mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f / \partial x}{(1 + |\nabla f|^2)^{1/2}} \right) = 0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f / \partial y}{(1 + |\nabla f|^2)^{1/2}} \right)$$

zu suchen. Offenbar ergibt vorstehende Gleichung sofort

$$\operatorname{div} \left(\nabla f / \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \right) = 0.$$

Der Ansatz impliziert, daß

$$\varphi := \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \quad \text{und}$$

$$\psi := \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2}$$

nur Funktionen von y bzw. x sind. Außerdem gilt

$$\varphi^2 + \psi^2 = (1 + |\nabla f|^2)^{-1} \cdot |\nabla f|^2 \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{1 - \varphi^2 - \psi^2} = 1 / \sqrt{1 + |\nabla f|^2},$$

so daß wir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi / \sqrt{1 - \varphi^2 - \psi^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \psi / \sqrt{1 - \varphi^2 - \psi^2}$$

schreiben können. Nun benutzt man die Symmetrie $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = (1 - \varphi^2 - \psi^2)^{-1} \cdot \left[\psi' \cdot \sqrt{1 - \varphi^2 - \psi^2} + \psi \frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2 - \psi^2}} \cdot \psi \cdot \psi' \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = (1 - \varphi^2 - \psi^2)^{-1} \cdot \left[\varphi' \cdot \sqrt{1 - \varphi^2 - \psi^2} + \varphi \frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2 - \psi^2}} \cdot \varphi \cdot \varphi' \right]$$

$$\Rightarrow \psi' (1 - \varphi^2 - \psi^2) + \psi^2 \cdot \psi' = \varphi' (1 - \varphi^2 - \psi^2) + \varphi^2 \cdot \varphi'$$

Es folgt:

$$\Psi'(1-\varphi^2) = \varphi' \cdot (1-\Psi^2) \quad \text{bzw.}$$

$$\Psi'(x)/(1-\Psi^2(x)) = \varphi'(y)/(1-\varphi^2(y)) \quad \text{für alle } x, y.$$

Dies ist nur dann möglich, wenn mit $a \in \mathbb{R}$

$$\Psi'(x) \cdot (1-\Psi^2(x))^{-1} \equiv a, \quad \varphi'(y)/(1-\varphi^2(y)) \equiv a$$

erfüllt ist. Lösungen sind

$$\varphi(y) = \tanh a \cdot (y - y_0), \quad \Psi(x) = \tanh a \cdot (x - x_0),$$

also z.B. für $a=1$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \varphi(y) / \sqrt{1-\varphi^2(y)-\Psi^2(x)} = \frac{\sinh y \cdot \cosh x}{(1 - \sinh^2 x - \sinh^2 y)^{1/2}}$$

und entsprechend für $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Daraus folgt für f als mögliche

Wahl

$$f(x, y) = \operatorname{arcsin}(\sinh x \cdot \sinh y).$$

□

Mit diesen Beispielen zu expliziten Lösungen der Minimalflächengleichung in Graphenform wollen wir es bewenden lassen. Natürlich hat man sich im vorigen Jahrhundert ausgiebig bemüht, möglichst viele konkrete Minimalflächen, die nicht notwendig Graphen über deren Gebieten sind, zu bestimmen.

Dies geschieht durch Verknüpfen der notwendigen Bedingung $H \equiv 0$ mit gewissen Symmetrieanahmen. Eine Übersicht über die so erzeugten klassischen Minimalflächen (z.B. das Katenoid) findet man mit den entsprechenden Rechnungen in den Kapiteln "Spezielle Minimalflächen" bei J.C.C. Nitsche. Larsson widmet diesem Bereich ebenfalls ein eigenes Kapitel.

§ 2 Lokale Beschreibung von Flächen in $\mathbb{R}^3$, einige geometrische Größen

Dieser Abschnitt enthält die allgemeine Definition von Flächen in $\mathbb{R}^3$ als zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten und gibt eine Übersicht über elementare geometrische Konzepte wie Tangentialraum, Krümmung, etc. Als Quelle zum Selbststudium empfehlen wir das Buch von M.P. Do Carmo "Differential Geometry of Curves and Surfaces".

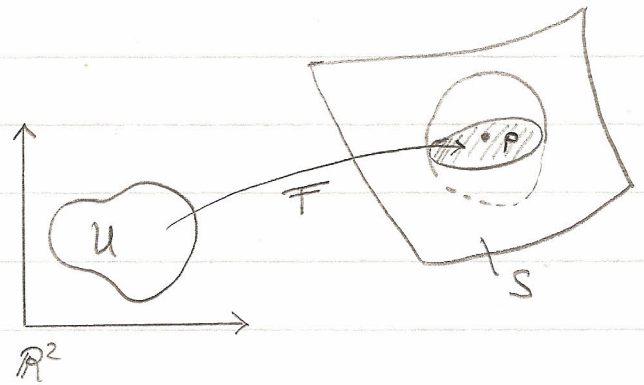
DEFINITION: Eine Teilmenge S von $\mathbb{R}^3$ heißt Fläche der Differenzierbarkeitsklasse C^r , $r \geq 1$, falls es zu jedem $p \in S$ offene Mengen $V \subset \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $p \in V$ und eine Abbildung $F: V \rightarrow U$ gibt, so daß folgende Aussagen gelten:

i) F ist von der Klasse C^r

ii) $F(U) = S \cap V$ iii) F ist injektiv

iv) $DF(u,v)$ hat in allen $(u,v) \in U$ den maximalen Rang 2.

Man nennt F eine lokale Parametrisierung oder ein lokales Koordinatensystem von S bei p .



Bedingung iv) sagt, daß die beiden Vektoren $\partial_1 F(u,v), \partial_2 F(u,v) \in \mathbb{R}^3$ an jeder Stelle $(u,v) \in U$ linear unabhängig sein müssen. Folglich kann man sich eine Fläche S lokal so vorstellen, daß man sie durch Verbiegen eines kleinen Stücks der Ebene (durch F) erzeugt. Die Injektivität von F schließt Selbstdurchschneidungen der Fläche S aus.

Beispiel: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei $C^r \Rightarrow$
 G_f ist eine Fläche der Klasse C^r .

G_f hat sogar eine globale Parametrisierung, nämlich die Graphenabbildung

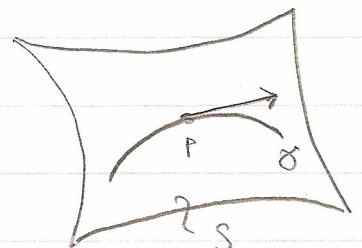
$$\Omega \ni (u,v) \longrightarrow (u,v, f(u,v)) \in \mathbb{R}^3.$$

Verbunden mit dem Flächenbegriff ist das geometrische Konzept der Tangentialebene.

DEFINITION: Ein Vektor $\eta \in \mathbb{R}^3$ heißt Tangentialvektor an die Fläche S im Punkt p , wenn es eine Kurve γ in S gibt mit

$$\gamma(0) = p, \quad \dot{\gamma}(0) = \eta.$$

Die Menge aller Tangentialvektoren an S in p bezeichnen wir mit $T_p S$.



Eine einfache Überlegung zeigt

LEMMA 1.1: Sei S eine Fläche, $p \in S$ und F eine lokale Parametrisierung von S bei p mit $F(u_0, v_0) = p$.
Dann gilt:

a) $T_p S$ ist ein zweidimensionaler Vektorunterraum von $\mathbb{R}^3$,
genannt Tangentialebene an die Fläche in p .

b) $T_p S$ wird aufgespannt von den beiden linear unabhängigen Vektoren $\partial_1 F(u_0, v_0)$, $\partial_2 F(u_0, v_0)$, also

$$T_p S = DF(u_0, v_0) (\mathbb{R}^2).$$

Beweis: Übungsaufgabe!

Ist F wie oben lokale Parametrisierung bei $p \in S$, so gilt:

$$\partial_1 F(u, v) \times \partial_2 F(u, v) \in \left(T_{F(u, v)} S \right)^\perp$$

für alle Punkte (u, v) aus dem Definitionsbereich von F , anders gesagt:
ist $q \in S$ nahe bei p , so wird durch

$$N(q) := \frac{(\partial_1 F \times \partial_2 F)}{|\partial_1 F \times \partial_2 F|} \left(F^{-1}(q) \right)$$

ein lokales Normalenfeld von S bei p erklärt.

Eine interessante geometrische Frage ist, ob man eine Fläche S stets mit einem globalen Normalenfeld ξ versehen kann, d.h. ξ hängt

stetig vom Fußpunkt p ab und erfüllt $|\xi(p)|=1$ sowie $\xi(p) \in$

$(T_p S)^\perp$ für alle $p \in S$. Das Beispiel des Möbiusbandes zeigt, daß globale Normalenfelder nicht existieren müssen, dies ist vielmehr äquivalent zur Orientierbarkeit von S .

Im Falle eines Graphen $S = G_f$ kann man sofort ein Normalenfeld aufschreiben:

$$(-\nabla f(u,v), 1) / \sqrt{1+|\nabla f(u,v)|^2}$$

ist das kanonische "nach oben zeigende" Einheitsnormalenfeld.

Uns interessieren im folgenden nur lokale Eigenschaften von Flächen, deshalb können wir uns direkt auf den Fall beschränken, daß

$$S = F(\Omega)$$

gilt mit einer regulären Parametrisierung $F: \mathbb{R}^2 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, wo F injektiv, r -mal stetig differenzierbar mit $\partial_1 F \times \partial_2 F \neq 0$ ist. (Offenbar bedeutet $\partial_1 F \times \partial_2 F \neq 0$ gerade, daß das Differential von F überall Rang 2 hat.)

Für diesen Fall wollen wir uns überlegen, daß

$$|A(S)| := \int_\Omega |\partial_1 F \times \partial_2 F| \, du \, dv$$

eine sinnvolle Definition für den Flächeninhalt von S ergibt.

Wie bei Graphen zerlegt man Ω in kleine achsenparallele Quadrate Q

und ersetzt dort $F(u, v)$ durch die affin lineare Approximation

$$L(u, v) = F(u_0, v_0) + DF(u_0, v_0) \left((u, v) - (u_0, v_0) \right).$$

Dann entspricht das Flächenstück $F(Q)$ dem Anteil $L(Q)$, und genau wie vorher sieht man

$$|Q| \cdot \left(|\partial_1 F(u_0, v_0)|^2 \cdot |\partial_2 F(u_0, v_0)|^2 - (\partial_1 F(u_0, v_0) \cdot \partial_2 F(u_0, v_0))^2 \right)^{1/2}$$

für den Flächeninhalt von $L(Q)$. Nun ist

$$(\dots)^{1/2} = |\partial_1 F(u_0, v_0) \times \partial_2 F(u_0, v_0)|,$$

und mit Approximation folgt die angestrebte Beziehung.

DEFINITION: Es sei $S = F(\Omega)$ eine regulär parametrisierte Fläche.
Dann heißt

$$A(S) := \int_{\Omega} |\partial_1 F \times \partial_2 F| \, du \, dv$$

Flächeninhalt von S .

BEMERKUNG: (Parameterinvarianz)

Ist $\gamma: \Omega' \rightarrow \Omega$ ein Diffeomorphismus des Gebietes $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ auf Ω , so parametrisiert $\tilde{F} := F \circ \gamma$ natürlich auch die Fläche S .
Bekannte Transformationsregeln für Integrale ergeben

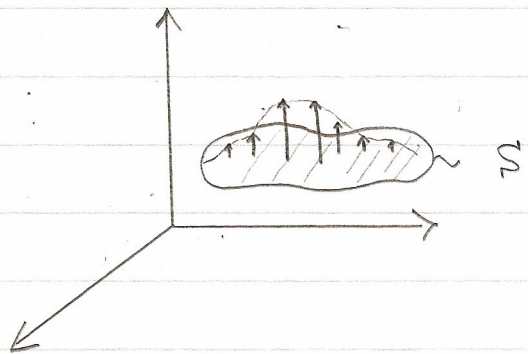
$$\int_{\Omega} |\partial_1 F \times \partial_2 F| \, du \, dv = \int_{\Omega'} |\partial_1 \tilde{F} \times \partial_2 \tilde{F}| \, du \, dv,$$

d.h. $A(S)$ hängt nicht von der speziell gewählten Parametrisierung ab.

Für eine allgemeine Definition des Flächeninhalts, die nicht an eine Parametrisierung von S geknüpft ist, vergleiche man M.P. Do Carmo, Kapitel 2.8.

Sei $S = F(\Omega)$ regulär parametrisierte Fläche.
Anschaulich (wie auch bei dem Graphen) nennt man S lokal flächenminimal, wenn

$$A(S) \leq A(\tilde{S})$$



gilt für jede Fläche $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$, die sich von S nur innerhalb einer kleinen Kugel unterscheiden, die den Rand von S nicht trifft.

Solche Vergleichsflächen $\tilde{S}$ kann man wie folgt erzeugen: Sei F die Parametrisierung von S und

$$\gamma(u, v) := \frac{\partial_1 F(u, v) \times \partial_2 F(u, v)}{|\partial_1 F(u, v) \times \partial_2 F(u, v)|}$$

Für $\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\gamma \equiv 0$ nahe $\partial\Omega$ und $|\varepsilon|$ genügend klein ist

$$F_\varepsilon(u, v) := F(u, v) + \varepsilon \cdot \gamma(u, v)$$

regulär Parametrisierung der Fläche S_ε , die durch normale Verschiebung aus S entsteht.

Die notwendige Bedingung für Minimalität lautet

$$\frac{d}{d\varepsilon}|_0 A(S_\varepsilon) = 0,$$

und wir wollen nachfolgend dieser Gleichung einen geometrischen Gehalt geben. Dies führt uns zwangsläufig auf den

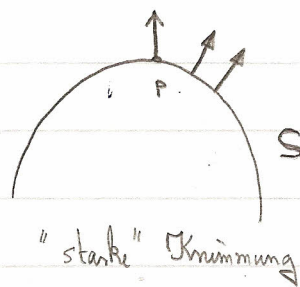
Krümmungsbegriff für Flächen: Sei $S = F(\Omega)$, $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$\rightarrow \mathbb{R}^3$, regulär parametrisierte Fläche und $P \in S$ beliebig. Anschaulich wird man Krümmung von S bei P durch die Änderung des Normalenfeldes N messen wollen, die entsteht, wenn man auf S längs einer Kurve γ durch P fortschreitet.

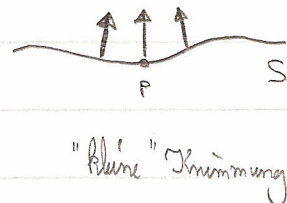
Das heißt präzise:

Große Krümmung liegt vor, wenn N seine Richtung bei P schnell verändert; die

Krümmung ist dagegen fast 0, wenn N - wie bei einer Ebene - nahezu konstant bleibt.



"starke" Krümmung



"kleine" Krümmung

Um zu einer Definition zu gelangen, setzen wir

$$K(q) := \frac{\partial_1 F \times \partial_2 F}{|\partial_1 F \times \partial_2 F|} \left(F^{-1}(q) \right), \quad q \in S,$$

und wählen $\tau \in T_P S$ sowie eine Kurve γ in S mit $\gamma(0) = P$ sowie $\dot{\gamma}(0) = \tau$.

Dann ist $t \rightarrow K(\gamma(t))$ Kurve in der Sphäre S^2

mit $N(\gamma(0)) = N(p)$ und

$$\frac{d}{dt}\bigg|_0 N(\gamma(t)) \perp N(p)$$

(gemäß $N(\gamma(t)) \cdot N(\gamma(t)) = 0$). Die letzte Beziehung sagt nun gerade

$$\frac{d}{dt}\bigg|_0 N(\gamma(t)) \in T_p S.$$

Da die Bildung $\frac{d}{dt}\bigg|_0 N(\gamma(t))$ nicht von der speziellen Wahl der Kurve γ abhängt (sofern diese $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = \tau$ erfüllt) und die Zuordnung

$$T_p S \ni \tau \rightarrow \frac{d}{dt}\bigg|_0 N(\gamma(t)) \in T_p S$$

zudem linear ist, vergibt man folgende

BEZEICHNUNG: Das Normalenfeld $N: S \rightarrow S^2$ der Fläche heißt Gauß-Abbildung von S. Die oben in jedem Punkt $p \in S$ erklärte lineare Abbildung $T_p S \rightarrow T_p S$ heißt Differential in p der Gauß-Abbildung, i. Z. dN_p .

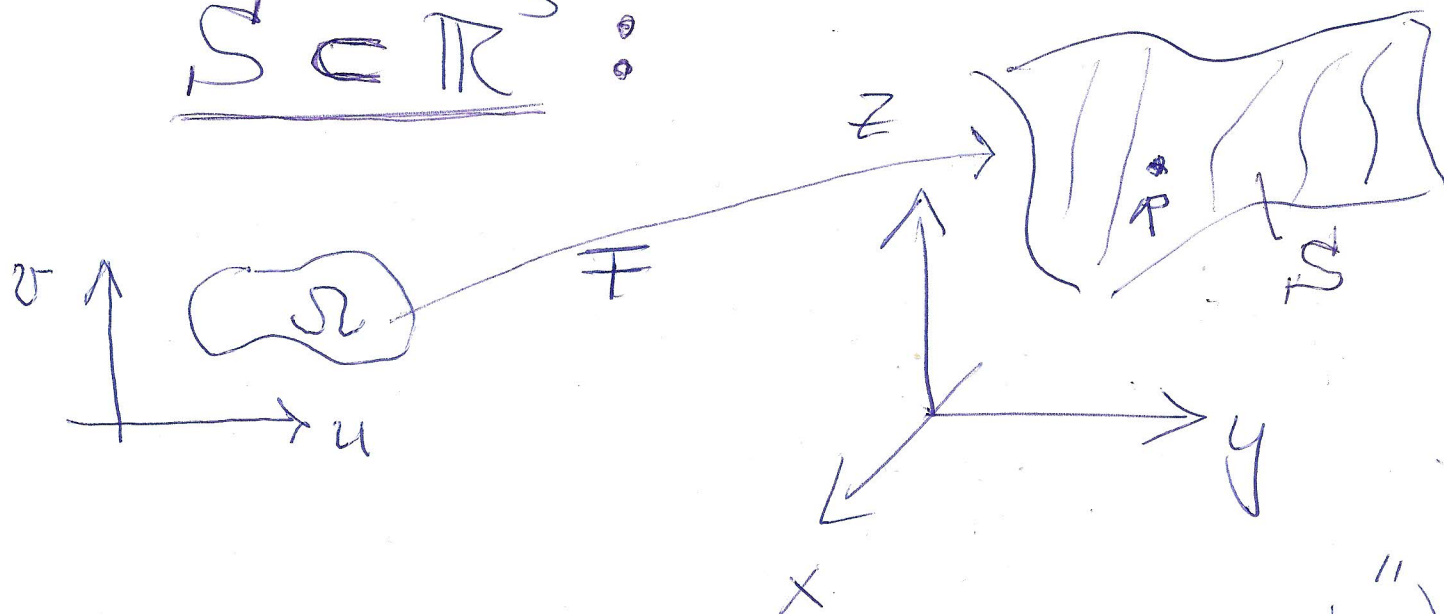
Anmerkung: 1) Da N nur auf S erklärt ist, läßt sich die Gauß-Abbildung nicht im üblichen Sinn ableiten, man kann lediglich längs Kurven in S differenzieren. ~~Bezeichnet aber $\tilde{N}$ eine differenzierbare Fortsetzung von N auf eine offene Umgebung O von S , so gilt:~~

~~$$dN_p(\tau) = \pi_p(\partial_\tau \tilde{N}(p)),$$~~

wo rechts $\partial_\tau \tilde{N}(p)$ für die klassische Richtungsableitung von $\tilde{N}$

geom. Begriffe für Flächen

$$\underline{S \subset \mathbb{R}^3} :$$



technische Vereinfachung ("eine Karte"):

$$\boxed{S = F(\Omega)}$$

für eine Abbildung

$$F: \mathbb{R}^2 \supset \Omega (\text{offen}) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

mit F differenzierbar ("C^r"),

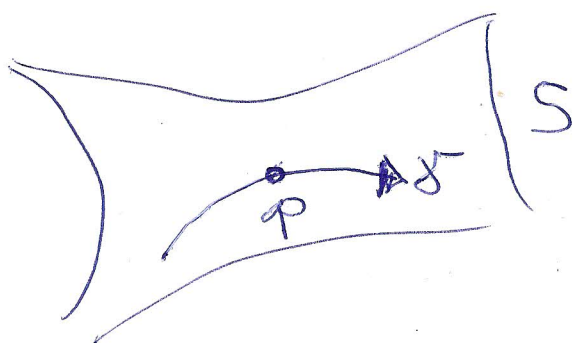
injektiv und

$$\boxed{\partial_1 F(u,v), \partial_2 F(u,v) \text{ l.u.}} \quad \forall (u,v) \in \Omega$$

- b -

Tangentialebene $T_p S$ von S in p :

$$T_p S = \{ \dot{\gamma}(0) \in \mathbb{R}^3 : \gamma \text{ Kurve} \\ \text{in } S \text{ mit } \gamma(0) = p \}$$



erzeuge alle Kurven γ via $F \circ \beta$ mit
Kurven β in $\Omega \implies$

- $T_p S$ ist ein 2D - Unterraum
von $\mathbb{R}^3$
- $T_p S =$ lineare Hülle von
 $\partial_1 F(u, v), \partial_2 F(u, v)$

(, wenn $p = F(u, v)$.)

- c -

Die Gauß-Abbildung beschreibt
ein Vektorfeld $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$N(p) \in (T_p S)^\perp$$

Formel : $N(p) := N(\bar{F}^{-1}(p))$,

$$N: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad N := \frac{\partial_1 \bar{F} \times \partial_2 \bar{F}}{|\partial_1 \bar{F} \times \partial_2 \bar{F}|}$$

Beobachtung:

1.) $|N(p)| = 1$, also $N: S \rightarrow S^2$

2.) Für $\tau \in T_p S$ liegt

$$dN_p(\tau) := \frac{d}{dt}\bigg|_0 N(\gamma(t))$$

in $T_p S$ (γ Kurve in S , $\tau = \dot{\gamma}(0)$)

3.) $dN_p: T_p N \rightarrow T_p N$ ist linear

dN_p = Differential der Gauß-Abb. in $p \in S$

2) Offenbar ist dN_p ein Gradmesser für das Krümmungsverhalten der Fläche S .

LEMMA 1.2: Das Differential dN_p ist eine selbstadjungierte lineare Abbildung $T_p S \rightarrow T_p S$.

Beweis: Eine lineare Abbildung $A : T_p S \rightarrow T_p S$ heißt selbstadjungiert oder auch symmetrisch, wenn

$$A(\tau) \cdot \eta = \tau \cdot A(\eta)$$

gilt für alle Vektoren $\tau, \eta \in T_p S$, wobei steht " $\cdot$ " für das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

Sei $\overline{F}$ wie üblich die Parametrisierung von S und $\alpha(t)$ eine Kurve in S mit $\alpha(0) = p$. Schreibt man

$$\alpha(t) = \overline{F}(\beta(t))$$

mit einer geeigneten Kurve β im Definitionsbereich von $\overline{F}$, so folgt:

$$dN_p(\dot{\alpha}(0)) = \frac{d}{dt}\bigg|_0 N(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\bigg|_0 \underbrace{(N \circ \overline{F})}_{=: N}(\beta(t)) =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} N\right)(\beta(0)) \cdot \beta'_1(0) + \left(\frac{\partial}{\partial v} N\right)(\beta(0)) \cdot \beta'_2(0),$$

wenn u, v die Variablen im Definitionsbereich von $\overline{F}$ bezeichnen und

β_1, β_2 die beiden Komponenten der ebenen Kurve β sind.

(Man beachte: N ist auf der Fläche S definiert, N steht für die Vektierung von N mit der Parametrisierung F .)

Für die speziellen Tangentenvektoren $(p := F(u_0, v_0))$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) =: \tau_1, \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0) =: \tau_2$$

ergibt sich $(\beta(t) = (u_0, v_0) + t \cdot (1, 0) \text{ bzw. } (u_0, v_0) + t \cdot (0, 1))$

$$dN_p(\tau_1) = \frac{\partial N}{\partial u}(u_0, v_0)$$

$$dN_p(\tau_2) = \frac{\partial N}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Nun ist dN_p linear und jeder Tangentenvektor $\tau \in T_p S$ eine Linearkombination von τ_1, τ_2 . Die Symmetrie von dN_p ergibt sich demnach, wenn man

$$\tau_1 \cdot dN_p(\tau_2) = \tau_2 \cdot dN_p(\tau_1) \quad *$$

verifizieren kann. Es gilt

$$\tau_1 \cdot dN_p(\tau_2) = \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial N}{\partial v}(u_0, v_0) =$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \cdot N \right) \Big|_{(u_0, v_0)} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) =$$

$$- \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0),$$

denn $\frac{\partial F}{\partial u}$ ist tangential und somit senkrecht zu N .

Die Symmetrie der zweiten Ableitungen liefert

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u} (u_0, v_0) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} (u_0, v_0),$$

und durch analoge Rechnung folgt

$$-\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} (u_0, v_0) = \tau_2 \cdot dN_p(\tau_1),$$

also *.

DEFINITION : Die durch

$$\Pi_p(\xi, \eta) := - dN_p(\xi) \cdot \eta$$

auf $T_p S$ definierte symmetrische Bilinearform heißt 2^{te} Fundamentalform von S bei p .

Bemerkung: 1) Das Minuszeichen in der Definition hat historische Gründe.
2) Π_p ist eng an die Wahl des kanonischen Normalenfeldes geknüpft, d.h. ersetzt man N durch $-N$ (Umkehr der Orientierung), so ändert Π_p das Vorzeichen. Aus diesem Grund betrachtet man oft die

vektorielle 2^{te} Fundamentalform: $\tilde{\Pi}_p : T_p S \times T_p S \rightarrow (T_p S)^\perp$
 $(\xi, \eta) \mapsto \{- dN_p(\xi) \cdot \eta\} N(p),$

die offensichtlich invariant ist gegen Änderungen der Orientierung. Außerdem

ist $\tilde{\Pi}_p$ nicht an die Existenz von globalen Normalenfeldern geknüpft,
und kann daher für beliebige 2-Mannigfaltigkeiten $\subset \mathbb{R}^3$ eingeführt werden.

Wir geben noch eine (vgl. Do Carmo, p. 16 f und p. 142 f)

Geometrische Interpretation von Π_p :

Seien $p \in S$ und $\xi \in T_p S$ mit $|\xi| = 1$. Man wählt eine
Kurve α in S mit

$$\alpha(0) = p, \quad \dot{\alpha}(0) = \xi$$

und $|\dot{\alpha}| \equiv 1$ (Parametrisierung nach der Bogenlänge).

Es gilt

$$N(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) = 0 \implies$$

$$\Pi_p(v, v) = -dN_p(v) \cdot v = -\frac{d}{dt}\bigg|_0 (N(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(0) =$$

$$N(0) \cdot \ddot{\alpha}(0).$$

$\ddot{\alpha}(0)$ ist bekanntlich der Krümmungsvektor an α zur Zeit 0,
so daß $\Pi_p(v, v)$ den Krümmungsanteil senkrecht zur Fläche
 S angibt. □

Kehren wir zurück zum Differential dN_p der Gauß-Abbildung:
Die Symmetrie der linearen Abbildung ergibt sofort
($\rightarrow$ vgl. Do Carmo, "Theorem" auf p. 216)

LEMMA 1.3: Es gibt eine orthonormale Basis ξ, η in $T_p S$ bestehend aus Eigenvektoren von dN_p , d.h.

$$dN_p(\xi) = -k_1 \cdot \xi,$$

$$dN_p(\eta) = -k_2 \cdot \eta,$$

wobei die Vorzeichenwahl für die Eigenwerte $-k_1, -k_2$ wieder historische Gründe hat.

DEFINITION: Die negativen Eigenwerte k_1, k_2 heißen Hauptkrümmungen, die zugehörigen Vektoren ξ, η entsprechend Hauptkrümmungsrichtungen. Man bekommt k_1, k_2 als Extremwerte von

$$\{w \in T_p S : |w| = 1\} \ni v \rightarrow \Pi_p(v, v).$$

$$H := \frac{1}{2} (k_1 + k_2) = -\frac{1}{2} \operatorname{Spur} dN_p$$

heißt mittlere Krümmung von S bei p,

$$K := k_1 \cdot k_2 = \det dN_p$$

ist die Gauß Krümmung von S bei p.

BEMERKUNG: Wir betrachten zur Vereinfachung nur global parametrisierte Flächen $S = F(\Omega)$ und beziehen uns stets auf das Normalenfeld $N(p) = (\partial_u F \times \partial_v F) / |\partial_u F \times \partial_v F|$ ($F^{-1}(p)$),

insbesondere ändert $H(p)$ (wie auch Π_p) das Vorzeichen, wenn man zu einer anderen Orientierung übergeht. Zur Vermeidung dieser Orientierungsabhängigkeit betrachtet man in der Regel den

mittleren Krümmungsvektor $\underline{H}(p) := H(p) N(p),$

der sich bei Ersetzung von N durch $-N$ nicht ändert. Außerdem läßt sich $\underline{H}$ auch für beliebige nicht notwendig orientierbare definieren, dazu wählt man einfach lokal in der Nähe eines Punktes p ein Normalenfeld (dies existiert immer, da eine 2-Mannigfaltigkeit ja lokal parametrisiert werden kann).

Wir berechnen nun die 1te Variation des Flächeninhalts $A(S)$ und stellen den Zusammenhang zur mittleren Krümmung her. Zunächst erinnern wir an die Formel

$$A(S) = \int_{\Omega} |\partial_1 F \times \partial_2 F| \, du \, dv$$

bzw.

$$A(S) = \int_{\Omega} \sqrt{\det(g_{ij})} \, du \, dv,$$

wo

$$g_{11} := \partial_1 F \cdot \partial_1 F, \quad g_{22} := \partial_2 F \cdot \partial_2 F,$$

$$g_{12} := \partial_1 F \cdot \partial_2 F$$

die sogenannte 1te Fundamentalförm von S ist.

Seien $N(u,v) := N(F(u,v))$, $f \in C^1_0(\Omega)$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$

Man bildet mit

$$\overline{F}_\varepsilon(u, v) := \overline{F}(u, v) + \varepsilon \cdot \underbrace{g(u, v) N(u, v)}_{=: \Upsilon(u, v)}$$

die durch normale Variation entstehende Vergleichsfläche $S_\varepsilon = \overline{F}_\varepsilon(\Omega)$ mit Inhalt

$$A(S_\varepsilon) = \int_{\Omega} \sqrt{\det g^\varepsilon} \, du \, dv,$$

$$g_\varepsilon = \begin{pmatrix} \partial_1 \overline{F}_\varepsilon \cdot \partial_1 \overline{F}_\varepsilon & \partial_1 \overline{F}_\varepsilon \cdot \partial_2 \overline{F}_\varepsilon \\ \partial_1 \overline{F}_\varepsilon \cdot \partial_2 \overline{F}_\varepsilon & \partial_2 \overline{F}_\varepsilon \cdot \partial_2 \overline{F}_\varepsilon \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$\frac{d}{d\varepsilon|_0} A(S_\varepsilon) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \varepsilon|_0} \sqrt{\det g^\varepsilon} \, du \, dv =$$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\det g^0)^{-1/2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon|_0} \det g^\varepsilon \, du \, dv$$

mit

$$\det g^\varepsilon = |\partial_1 \overline{F}|^2 \cdot |\partial_2 \overline{F}|^2 - (\partial_1 \overline{F} \cdot \partial_2 \overline{F})^2$$

$$+ 2 \cdot \varepsilon \left[|\partial_2 \overline{F}|^2 \partial_1 \overline{F} \cdot \partial_1 \Upsilon + |\partial_1 \overline{F}|^2 \partial_2 \overline{F} \cdot \partial_2 \Upsilon \right]$$

$$- \varepsilon \cdot 2 \left[(\partial_1 \overline{F} \cdot \partial_2 \overline{F}) (\partial_2 \Upsilon \cdot \partial_1 \overline{F}) + (\partial_1 \overline{F} \cdot \partial_2 \overline{F}) (\partial_2 \overline{F} \cdot \partial_1 \Upsilon) \right]$$

$$+ \text{Terme mit Vorfaktor } \varepsilon^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon|_0} \det g^\varepsilon = 2 \cdot \left(|\partial_2 \overline{F}|^2 \partial_2 \overline{F} \cdot \partial_2 \Upsilon + |\partial_2 \overline{F}|^2 \partial_1 \overline{F} \cdot \partial_1 \Upsilon \right) -$$

$$- (\partial_1 F \cdot \partial_2 F) \cdot 2 \cdot (\partial_1 F \cdot \partial_2 \Psi + \partial_2 F \cdot \partial_1 \Psi) .$$

Nun benutzt man die für $i, j \in \{1, 2\}$ gültige Beziehung

$$\partial_i \Psi \cdot \partial_j F = \partial_i (\Psi N) \cdot \partial_j F = \partial_i \Psi \cdot N \cdot \partial_j F + \Psi \cdot \partial_i N \cdot \partial_j F =$$

$$\Psi \cdot \partial_i N \cdot \partial_j F = - \text{II}(\partial_i F, \partial_j F) \cdot \Psi ,$$

die wir uns vorher im Zusammenhang mit der Symmetrie der zweiten Fundamentalform überlegt haben. Dabei geht natürlich die Orthogonalitätsrelation

$$N \cdot \partial_j F = 0$$

ein. Man bekommt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon|_0} \det g^\varepsilon &= -2 \cdot \Psi \cdot [|\partial_1 F|^2 \text{II}(\partial_2 F, \partial_2 F) + |\partial_2 F|^2 \text{II}(\partial_1 F, \partial_1 F) \\ &\quad - 2 \cdot (\partial_1 F \cdot \partial_2 F) \text{II}(\partial_1 F, \partial_2 F)] \\ (1) \end{aligned}$$

Die rechte Seite von (1) soll nun in Terme mit H umgeformt werden. Per Definition ist

$$H(p) = - \frac{1}{2} \text{Spur } dK_p =$$

$$\frac{1}{2} (\text{II}_p(\xi, \xi) + \text{II}_p(\eta, \eta)) ,$$

wobei ξ, η eine beliebige Orthonormalbasis von $T_p S$ repräsentiert.

Eine solche Normen wir aus den Basisvektoren $a_1 F, a_2 F$ wie folgt erzeugen:

$$\xi := a_1 F / |a_1 F|, \quad \tilde{\xi} := a_2 F - (a_2 F \cdot \xi) \xi,$$

$$\eta := \tilde{\xi} / |\tilde{\xi}|.$$

$$\text{Es gilt } |\tilde{\xi}|^2 = |a_2 F|^2 - (a_2 F \cdot \xi)^2 =$$

$$|a_1 F|^{-2} \cdot \det g,$$

und damit

$$H = \frac{1}{2} \left(\text{II}(\xi, \xi) + |\tilde{\xi}|^{-2} \text{II}(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\text{II}(\xi, \xi) + |\tilde{\xi}|^{-2} \text{II}(a_2 F - (a_2 F \cdot \xi) \xi, a_2 F - (a_2 F \cdot \xi) \xi) \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\text{II}(\xi, \xi) + |\tilde{\xi}|^{-2} \cdot \text{II}(a_2 F, a_2 F) + |\tilde{\xi}|^{-2} \cdot (a_2 F \cdot \xi)^2 \text{II}(\xi, \xi) \right.$$

$$\left. - 2 |\tilde{\xi}|^{-2} \text{II}(a_2 F, \xi) (a_2 F \cdot \xi) \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\text{II}(\xi, \xi) \cdot \left[1 + |\tilde{\xi}|^{-2} (a_2 F \cdot \xi)^2 \right] \right.$$

$$\left. + |\tilde{\xi}|^{-2} \cdot \text{II}(a_2 F, a_2 F) - 2 \cdot |\tilde{\xi}|^{-2} (a_2 F \cdot \xi) \text{II}(a_2 F, \xi) \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(|\tilde{\xi}|^{-2} \cdot |a_2 F|^2 \cdot \text{II}(\xi, \xi) + |\tilde{\xi}|^{-2} \text{II}(a_2 F, a_2 F) \right. \\ \left. - 2 \cdot |\tilde{\xi}|^{-2} (a_2 F \cdot \xi) \text{II}(a_2 F, \xi) \right) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot |\tilde{\xi}|^{-2} |a_1 F|^{-2} \left(|a_2 F|^2 \cdot \text{II}(a_1 F, a_1 F) + |a_1 F|^2 \cdot \text{II}(a_2 F, a_2 F) \right. \\ \left. - 2 \cdot (a_1 F \cdot a_2 F) \cdot \text{II}(a_1 F, a_2 F) \right)$$

Das liefert folgende Formel für die mittlere Krümmung:

$$(2) \quad H|_F = \frac{1}{2} \frac{1}{\det g} \cdot \left[|z_F|^2 \cdot II(\partial_1 F, \partial_1 F) + |z_F|^2 \cdot II(\partial_2 F, \partial_2 F) - 2 \cdot (\partial_1 F \cdot \partial_2 F) \cdot II(\partial_1 F, \partial_2 F) \right]$$

Kombiniert man schließlich (1), (2), so lautet die 1^{te} Variation des Flächeninhalts

$$\frac{d}{d\varepsilon|_0} A(S_\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_\Omega \sqrt{\det g}^{-1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon|_0} \det g^\varepsilon \, du \, dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega (-2 \cdot g) \cdot 2 \cdot \sqrt{\det g} \cdot H|_F \, du \, dv$$

$$= -2 \cdot \int_\Omega g \cdot H|_F \cdot \sqrt{\det g} \, du \, dv$$

Ist S eine Minimalfläche in dem Sinne, daß

$$A(S) \leq A(S_\varepsilon)$$

für alle wie oben erzeugten Vergleichsflächen S_ε gilt, so folgt

$$\int_\Omega g \cdot H|_F \cdot \sqrt{\det g} \, du \, dv = 0$$

für beliebige Funktionen g mit kompaktem Träger in Ω , und wir schließen wegen $\det g > 0$ ($\Leftrightarrow DF$ hat Rang 2)

SATZ 2.1: Sei $S = F(\Omega)$ eine über dem Gebiet Ω regulär parametrisierte Fläche. Wenn S unter allen über Ω parametrisierten Flächen S^* mit gleichem Rand den Flächeninhalt minimiert, so folgt:

$$H \equiv 0.$$

BEMERKUNGEN: 1) Wie schon mehrfach gesagt, ist die mittlere Krümmung H ein nur für global orientierbare Flächen S von $\mathbb{R}^3$ sinnvoller Begriff und abhängig davon, für welche Orientierung man sich entscheidet, d.h. man muß stets ein globales Normalenfeld auf S auszeichnen, auf das man sich bei der Berechnung von H bezieht. Für lokal flächenminimierende Objekte ist das natürlich umkehrbar: H verschwindet unabhängig von der fixierten Orientierung.

2) Grundsätzlich kann man "Flächeninhalt" (als 2-dimensionales Hausdorff Maß) auch für nicht orientierbare Flächen erklären. Für diese Objektklasse hat man ferner die vektorielle mittlere Krümmung $\underline{H}$, und die Aussage von Satz 2.1 lautet entsprechend:

Ist S eine lokal minimale Mannigfaltigkeit $\subset \mathbb{R}^3$,
so gilt $\underline{H} = 0$ bzw. $H = 0$, wenn
man H bzgl. beliebiger lokaler Parametrisierungen bildet.

□

Zur Vertiefung der geometrischen Begriffe wollen wir die mittlere Krümmung für Graphen $S = G_f$ ausrechnen und damit auch die Verbindung zur Minimalflächengleichung aus Satz 1.1 herstellen.

Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 und $S = G_f$ der zugehörige Graph. Als kanonische Parametrisierung lässt sich an

$$F(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

mit dem Normalenfeld

$$N(F(u, v)) = N(u, v) = (-\nabla f(u, v), 0) / \sqrt{1 + |\nabla f(u, v)|^2}.$$

Dazu gehören die folgenden Größen:

$$\partial_1 F = (1, 0, \partial_1 f), \quad \partial_2 F = (0, 1, \partial_2 f), \quad \partial_1 F \cdot \partial_2 F = \partial_1 f \cdot \partial_2 f,$$

$$\begin{aligned} \det g &= \det \begin{pmatrix} \partial_1 F \cdot \partial_1 F & \partial_1 F \cdot \partial_2 F \\ \partial_2 F \cdot \partial_1 F & \partial_2 F \cdot \partial_2 F \end{pmatrix} = (1 + (\partial_1 f)^2) \cdot (1 + (\partial_2 f)^2) - (\partial_1 f \cdot \partial_2 f)^2 \\ &= 1 + |\nabla f|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II}(\partial_1 F, \partial_1 F) &= -\partial_1 F \cdot \partial_1 N = -(1, 0, \partial_1 f) \cdot \frac{(-2\partial_1 \partial_1 f, -2\partial_2 \partial_1 f, 0) \cdot \sqrt{1 + |\nabla f|^2}}{1 + |\nabla f|^2} \\ &= 2\partial_1 \partial_1 f / \sqrt{1 + |\nabla f|^2}, \end{aligned}$$

$$\text{II}(\partial_2 F, \partial_2 F) = 2\partial_2 \partial_2 f / \sqrt{1 + |\nabla f|^2},$$

$$\begin{aligned} \text{II}(\partial_1 F, \partial_2 F) &= -\partial_2 F \cdot \partial_1 N = -(0, 1, \partial_2 f) \cdot \frac{(-2\partial_1 \partial_2 f, -2\partial_2 \partial_2 f, 0) \sqrt{1 + |\nabla f|^2}}{1 + |\nabla f|^2} \\ &= 2\partial_1 \partial_2 f / \sqrt{1 + |\nabla f|^2}. \end{aligned}$$

Aus (2) folgt:

$$H|_F = \frac{1}{2} \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \left[(1+(\nabla_2 f)^2) \cdot \frac{\partial_1 \partial_1 f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} + (1+(\nabla_1 f)^2) \cdot \frac{\partial_2 \partial_2 f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - 2 \partial_1 f \cdot \partial_2 f \cdot \partial_1 \partial_2 f \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right] =$$

$$\frac{1}{2} \cdot (1+|\nabla f|^2)^{-3/2} \left\{ \partial_1 \partial_1 f \cdot (1+(\nabla_2 f)^2) + \partial_2 \partial_2 f \cdot (1+(\nabla_1 f)^2) - 2 \cdot \partial_1 f \cdot \partial_2 f \cdot \partial_1 \partial_2 f \right\}.$$

Aus dieser Gleichung liest man ab:

f ist Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung $\iff$ die mittlere Krümmung H von G_f verschwindet identisch.

Wir haben uns mit vorstehenden Überlegungen davon überzeugt, daß unser Ausgangsproblem "finde Flächen kleinsten Inhalts" notwendig auf das Studium von Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung führt, d.h. Minimalflächen im eigentlichen Sinn erfüllen insbesondere $H \equiv 0$. Im nächsten Abschnitt diskutieren wir einige allgemeine Eigenschaften von regulär parametrisierten Flächen mit mittlerer Krümmung $\equiv 0$, als Folgerung unserer Überlegungen charakterisieren wir mit funktionentheoretischen Argumenten gewisse Klassen von regulär parametrisierten Flächen, deren Krümmung H verschwindet.

§3 Konforme Parametrisierungen, die Weierstraß Darstellung für Minimalflächen

Interessiert man sich für solche Eigenschaften einer Fläche, die nicht von der Parametrisierung abhängen, so kann man zur Diskussion dieser Eigenschaften möglichst "gute" lokale Koordinatensysteme einführen. Es stellt sich heraus, daß sogenannte konforme Parameter viele Vorteile in sich vereinen (geometrische Größen der Fläche S nehmen in konformen Koordinaten eine besonders einfache Form an).

DEFINITION: Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $F: \Omega \rightarrow S$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$) ein lokales Koordinatensystem. F heißt konform, falls

$$|\partial_1 F| = |\partial_2 F|, \quad \partial_1 F \cdot \partial_2 F = 0$$

auf dem Definitionsbereich Ω gilt.

Obige Bedingung sagt, daß die kanonischen Tangentenvektoren $\partial_1 F, \partial_2 F$ stets gleichlang sind und zudem aufeinander senkrecht stehen. Man überlegt sich leicht, daß konforme Parametrisierungen winkeltreu sind: schneiden sich zwei ebene Kurven γ_1, γ_2 in Ω unter dem Winkel α , so ist auch der Schnittwinkel der Bildkurven $F(\gamma_1), F(\gamma_2)$ durch α gegeben. Eine in voller Allgemeinheit nicht einfach zu beantwortende Frage ist natürlich die nach der Existenz von konformen Koordinatensystemen bei vorgelegter Fläche S . Dies werden wir später im Spezialfall klären, vorab begnügen wir uns mit einigen elementaren Aussagen.

Ist $F: \Omega \rightarrow S$ konform, so setzt man

$$\lambda^2 := |\partial_1 F|^2 (= |\partial_2 F|^2)$$

und sieht

$$g_{ij} = \lambda^2 \cdot \delta_{ij}$$

für die 1^{te} Fundamentalfarm g von S , speziell ist

$$\det g = \lambda^4.$$

LEMMA 3.1: Ist F konforme Parametrisierung von S und bezeichnet $\underline{H}$ die auf S erklärte vektorielle mittlere Krümmung, so gilt

$$\Delta F = 2 \cdot \lambda^2 \cdot \underline{H}(F),$$

insbesondere steht der komponentenweise gebildete Laplace Operator ΔF auf S in den entsprechenden Bildpunkten von F senkrecht.

BEMERKUNG: Definiert man die mittlere Krümmung H bzgl. des natürlichen Normalenfeldes

$$\partial_1 F \times \partial_2 F / |\partial_1 F \times \partial_2 F|,$$

so ist

$$\underline{H}(F) = H(F) \cdot \partial_1 F \times \partial_2 F \cdot \lambda^{-2},$$

Wir bekommen die sogenannte

$$H\text{-Flächengleichung: } \Delta F = 2 \cdot H \circ F \cdot \partial_1 F \times \partial_2 F,$$

die folgende Bedeutung hat: zu gegebener Funktion $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (und vorgeschriebenen Randbedingungen) sucht man Lösungen F der Gleichung auf Ω , die zusätzlich noch die Konformitätsrelation erfüllen. Die Bilder $F(\Omega)$ sind dann Flächen, die in jedem Punkt $F(u,v)$ die mittlere Krümmung $H(F(u,v))$ haben. Die Wahl $H \equiv 0$ führt als Spezialfall auf die Theorie konform parametrisierter Minimalflächen. Das H -Flächensystem hat eine sehr komplizierte Struktur, Existenz- und Regularitätssätze sind erst in den letzten Jahren bewiesen worden, und es gibt immer noch viele offene Fragen.

Beweis von Lemma 3.1: Sei

$$N(u,v) = \frac{\partial_1 F \times \partial_2 F}{|\partial_1 F \times \partial_2 F|} (u,v)$$

(also $N \circ F = N$). Wir zeigen

$$\Delta F \cdot \partial_1 F = 0,$$

was sofort $\Delta F = J \cdot N$ mit einer geeigneten reellen Funktion $J: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ impliziert. Es ist

$$\partial_1 \partial_1 F \cdot \partial_1 F = \frac{1}{2} \partial_1 |\partial_1 F|^2 = \frac{1}{2} \partial_1 |\partial_2 F|^2 =$$

$$\partial_2 F \cdot \partial_1 \partial_2 F = \partial_2 F \cdot \partial_2 \partial_1 F = \partial_2 \underbrace{(\partial_2 F \cdot \partial_1 F)}_{=0} - \partial_2 \partial_2 F \cdot \partial_1 F$$

$$\Rightarrow \Delta F \cdot \partial_1 F = 0,$$

und die andere Relation folgt ganz analog.

Es gilt andererseits

$$\begin{aligned} H(F) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\det g} \left[|\partial_2 F|^2 \cdot \text{II}(\partial_1 F, \partial_1 F) + |\partial_1 F|^2 \cdot \text{II}(\partial_2 F, \partial_2 F) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lambda^{-4} \cdot \lambda^2 \cdot \left[\text{II}(\partial_1 F, \partial_1 F) + \text{II}(\partial_2 F, \partial_2 F) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \lambda^{-2} \left[\partial_1 F \cdot \partial_1 N + \partial_2 F \cdot \partial_2 N \right] \end{aligned}$$

Beachtet man

$$\partial_i F \cdot \partial_i N = \partial_i \left(\overbrace{\partial_i F \cdot N}^{=0} \right) - N \cdot \partial_i \partial_i F,$$

so folgt:

$$H \circ F = \frac{1}{2} \cdot \lambda^{-2} \Delta F \cdot N = \frac{1}{2} \lambda^{-2} \cdot \mathcal{J} \implies$$

$$\mathcal{J} = 2 \cdot \lambda^2 \cdot H \circ F,$$

$$\text{also} \quad \Delta F = 2 \cdot \lambda^2 \underbrace{H \circ F \cdot N}_{= \underline{\underline{H}} \circ F}.$$

Als Korollar bekommt man

LEMMA 3.2: Sei F konforme Parametrisierung der Klasse C^2 einer Fläche S . Dann gilt:

$\begin{aligned} S \text{ ist Minimalfläche (im Sinne von } H=0) &\iff \\ F \text{ ist harmonisch (also } \Delta F=0). \end{aligned}$

Wir wollen nun kurz andeuten, wie man konform parametrisierte Minimalflächen mit funktionentheoretischen Methoden beschreiben kann. Sei dazu

$$F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

eine beliebig Abbildung der Klasse C^2 . Bezeichnen wir die Variablen in Ω mit x_1 und x_2 , so sei

$$(1) \quad \phi_k(z) := \frac{\partial F^k}{\partial x_1}(z) - i \frac{\partial F^k}{\partial x_2}(z),$$

$$z = x_1 + i x_2 \in \Omega \subset \mathbb{C}, \quad k=1,2,3.$$

Es folgt:

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_{k=1}^3 \phi_k^2(z) = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial F^k}{\partial x_1}(z) \right)^2 - \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial F^k}{\partial x_2}(z) \right)^2 \\ \quad - 2i \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F^k}{\partial x_1}(z) \cdot \frac{\partial F^k}{\partial x_2}(z) \\ = | \partial_1 F |^2(z) - | \partial_2 F |^2 - 2i \partial_1 F(z) \cdot \partial_2 F(z), \end{cases}$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^3 | \phi_k |^2(z) = | \partial_1 F(z) |^2 + | \partial_2 F(z) |^2,$$

und man erkennt sofort folgende Aussagen:

a)

ϕ_k holomorph auf Ω , $k=1,2,3$ $\iff$ F ist harmonisch.

Beweis:
$$\Delta \overline{F}^k = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \overline{F}^k \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \overline{F}^k \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\operatorname{Re} \phi_k) - \frac{\partial}{\partial x_2} (\operatorname{Im} \phi_k)$$

Also:
$$\Delta \overline{F}^k = 0 \iff \frac{\partial}{\partial x_1} (\operatorname{Re} \phi_k) = \frac{\partial}{\partial x_2} (\operatorname{Im} \phi_k).$$

Die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (\operatorname{Re} \phi_k) = - \frac{\partial}{\partial x_1} (\operatorname{Im} \phi_k)$$

folgt aber sofort aus der Definitionsgleichung (1) für ϕ_k , denn die zweiten Ableitungen von $\overline{F}^k$ sind ja symmetrisch. Mithin verschwindet der Laplace Operator von $\overline{F}^k$ genau dann, wenn ϕ_k die Cauchy Riemann Differentialgleichungen erfüllt, also eine auf Ω holomorphe Funktion darstellt.

b) $\overline{F}$ erfüllt die Konformitätsrelation $|\partial_1 \overline{F}| = |\partial_2 \overline{F}|$, $\partial_1 \overline{F} \cdot \partial_2 \overline{F} = 0$

$$\iff \sum_{k=1}^3 \phi_k^2 \equiv 0 \text{ auf } \Omega.$$

Beweis: vgl. (2).

c) $\overline{F}$ erfülle die Konformitätsrelation. Dann:

$$\operatorname{Rang} D\overline{F}(z) = 2 \text{ auf } \Omega \iff \sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2(z) > 0 \text{ in jedem Punkt.}$$

Beweis: $\operatorname{Rang} D\overline{F}(z) = 2 \iff |\partial_1 \overline{F}(z) \wedge \partial_2 \overline{F}(z)| > 0 \iff$

$$|\partial_1 F(z)|^2 \cdot |\partial_2 F(z)|^2 - (\partial_1 F \cdot \partial_2 F)^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{(Konformitätsrelation)}$$

$$|\partial_1 F(z)|^4 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |\partial_1 F(z)|^2 + |\partial_2 F(z)|^2 > 0 \quad \text{(Konformitätsrel.)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 > 0$$

Als Konsequenz liest man ab

LEMMA 3.3: Sei $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ konforme Parametrisierung (im Sinne der Definition zu Beginn von §2, wobei eben zusätzlich die Konformitätsrelation gelten soll) eines Teils der Minimalfläche S (Minimalfläche hier: $H=0$). Dann gilt:

$$\phi_k(z) := \partial_1 F^k(z) - i \partial_2 F^k(z), \quad k=1,2,3,$$

$$\text{ist holomorph auf } \Omega \text{ mit } \sum_{k=1}^3 \phi_k(z)^2 = 0, \quad \sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2$$

$$> 0 \text{ in jedem Punkt } z \in \Omega.$$

Nun sind wir aber eigentlich am Verfahren zur Erzeugung von Minimalflächen interessiert, und Lemma 3.3 geht gerade wieder den anderen Weg. Um Minimalflächen zu konstruieren, gehen wir aus von drei holomorphen Funktionen

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

mit gemeinsamem Definitionsbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ und verlangen:

$$(4) \quad \phi_1^2(z) + \phi_2^2(z) + \phi_3^2(z) = 0, \quad |\phi_1(z)|^2 + |\phi_2(z)|^2 + |\phi_3(z)|^2 > 0$$

in jedem Punkt $z \in \Omega$. Ist Ω einfach zusammenhängend, so gibt es zu ϕ_k eine bis auf additive Konstanten eindeutige komplexe Stammfunktion, zum Beispiel ist die Wahl

$$\Psi_k(z) := \int_{z_0}^z \phi_k(\xi) d\xi$$

möglich; wo $\int_{z_0}^z$ die Integration längs eines beliebigen Weges in Ω

von z_0 nach z bedeutet und z_0 für einen beliebigen aber festen Basispunkt steht.

Nun setzt man

$$(5) \quad \boxed{F^k(z) := \operatorname{Re} \Psi_k(z), \quad z \in \Omega}$$

und gewinnt eine reell analytische Abbildung $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, für die offenbar gilt:

$$\partial_1 F^k - i \partial_2 F^k = \partial_1 \operatorname{Re} \Psi_k - i \partial_2 \operatorname{Re} \Psi_k = \quad \text{C.R. Gln. für } \Psi_k$$

$$\partial_1 \operatorname{Re} \Psi_k + i \partial_1 \operatorname{Im} \Psi_k = \frac{d}{dz} \Psi_k = \phi_k,$$

denn für jede holomorphe Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist

$$\frac{d}{dz} f = \partial_1 \operatorname{Re} f + i \partial_1 \operatorname{Im} f \quad \left(\frac{d}{dz} f = \text{Kompl. Abl.} \right).$$

Mithin sind die gemäß (1) zu F assoziierten Funktionen gerade unsere vorgegebenen holomorphen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , und aus den Bedingungen (4) lesen wir mit unseren Vorüberlegungen ab:

Die in (5) definierte Funktion $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist harmonisch, erfüllt die Konformitätsrelation und hat überall maximalen Rang. Allerdings handelt es sich bei F im allgemeinen nicht um eine Parametrisierung der Bildmenge $F(\Omega)$, denn über globale Injektivität von F wird ja nichts ausgesagt. Mit anderen Worten: $F(\Omega)$ kann durchaus Selbstdurchschneidungen haben und ist dann gar keine Mannigfaltigkeit! (F ist lediglich eine [konforme] Immersion.) Dennoch läßt sich folgendes sagen: Ist $(x_0, y_0) \in \Omega$ beliebig, so folgt aus $\text{Rang } DF(x_0, y_0) = 2$ die Existenz einer kleinen Umgebung Ω' von (x_0, y_0) in Ω , so daß $F|_{\Omega'}$ das Gebiet $F(\Omega')$ regulär parametrisiert; folglich ist $F(\Omega')$ eine Mannigfaltigkeit mit verschwindender mittlerer Krümmung, und das ganze Bild $F(\Omega)$ ist aus solchen Stücken von Minimalflächen zusammengesetzt. Wir halten fest

LEMMA 3.4: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend. $\phi_k: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ seien auf Ω holomorph mit

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 = 0, \quad \sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 > 0, \quad z \in \Omega.$$

Man setzt (bis auf Konstanten)

$$F_k(z) := \text{Re} \int^z \phi_k(\xi) d\xi, \quad k=1,2,3.$$

Dann ist für genügend kleine Teilgebiete Ω' von Ω $F(\Omega')$ eine Minimalfläche, die durch $F|_{\Omega'}$ regulär konform parametrisiert wird. Für injektive F ist sogar das ganze Bild $F(\Omega)$ eine Minimalfläche. ■

BEMERKUNG: Vorsicht man auf die Forderung $\sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2(z)$

$=: \odot(z) > 0$ in jedem Punkt, so bedeutet dies, daß es $z \in \Omega$ gibt mit

$$\text{Rang } DF(z) < 2 \iff \partial_1 F(z) \wedge \partial_2 F(z) = 0 \iff$$

$$\partial_1 F(z) = \partial_2 F(z) = 0 \quad (\text{Konformitätsrelation})$$

Solche Punkte nennt man Verzweigungspunkte von F . Verzweigungspunkte sind offenbar genau die gemeinsamen Nullstellen von ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , die nach bekannten Sätzen über holomorphe Funktionen in Ω isoliert liegen, sich also nicht im Inneren von Ω sondern nur zum Rand $\partial\Omega$ hin häufen können, vorausgesetzt nicht alle drei Funktionen ϕ_k , $k=1,2,3$, sind identisch 0.

ZUSATZ (zu LEMMA 3.4): Seien $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, nicht identisch 0, mit

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 \equiv 0.$$

Dann gibt es eine höchstens abzählbare Menge $\Lambda \subset \Omega$ ohne Häufungspunkte in Ω , so daß $F(\Omega')$ für genügend kleine Gebiete $\Omega' \subset \Omega - \Lambda$ eine regulär parametrisierte Minimalfläche ist.



Diese Erkenntnis bringt uns natürlich der Lösung des Plateau Problems (Konstruktion von Minimalflächen zu gegebener Berandung Γ) in keiner Weise näher, immerhin sind wir jetzt in der Lage, durch Angabe holomorpher Funktionen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 mit $\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 \equiv 0$ eine Vielzahl von Flächen mit Krümmung 0 zu definieren. Das führt letztendlich auf

Die Weierstraß Darstellung für Minimalflächen: (Osserman, § 8)

Nach den vorstehenden Überlegungen reduziert sich die Fragestellung darauf, bei gegebenem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen $\phi_k: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $k=1,2,3$, zu finden mit

$$(I) \quad \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0 \quad \text{auf } \Omega.$$

Es gilt

SATZ 3.1: Sei $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ meromorph (also holomorph bis auf Polstellen als mögliche Singularitäten). $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph mit folgender Eigenschaft: Ist g in z ein Pol der Ordnung m , soll f in z von der Ordnung $\geq 2 \cdot m$ verschwinden. Dann sind die Funktionen

$$(II) \quad \phi_1 := \frac{1}{2} f (1 - g^2), \quad \phi_2 := \frac{i}{2} f (1 + g^2), \quad \phi_3 := f \cdot g$$

holomorph in Ω und Lösungen von (I). Ist umgekehrt ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ein Lösungssatz von (I), der nicht von der Gestalt

$$\phi_1 = i \phi_2, \quad \phi_3 = 0$$

ist, so findet man f, g wie oben beschrieben und der Eigenschaft, daß ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 durch die Formeln (II) gegeben sind.

BEMERKUNG: Sind f, g wie oben, so nennt man die Relationen

$$F_1(z) = \operatorname{Re} \int_{\gamma}^z \frac{1}{z} f(1-g^2) d\xi,$$

$$F_2(z) = \operatorname{Re} \int_{\gamma}^z \frac{1}{z} f(1+g^2) d\xi,$$

$$F_3(z) = \operatorname{Re} \int_{\gamma}^z f \cdot g d\xi$$

Weierstraß Darstellung der "Minimalfläche $F(\Omega)$ ". Hierbei ist die Bezeichnung Minimalfläche so zu verstehen, daß Verzweigungspunkte und Selbstdurchschneidungen zulässig sind, die Einschränkung von F auf kleine Gebiete Ω' ohne Verzweigungspunkte aber reguläre konforme Parametrisierungen von Flächen mit mittlerer Krümmung 0 sind.

(Anmerkung: eine Funktion $g: \Omega \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ heißt auf Ω meromorph, wenn Λ eine abzählbare Teilmenge von Ω ist, die sich höchstens zum Rand $\partial\Omega$ von Ω häuft und wenn g in jedem Punkt $z \in \Lambda$ eine Polstelle hat.

vgl. Cantan BI Taschenbuch, Def auf p.45 oder
Behnke - Sommer p.201

Meromorphe g haben die Form $g = \varphi/\psi$ mit holomorphem φ, ψ , wobei φ ohne Nullstelle ist und ψ nicht identisch verschwindet.)

Beweis von Satz 3.1:

Seien f, g wie im Satz beschrieben und $\phi_k, k=1,2,3$ gemäß (II) skizziert. Ist z_0 Pol der Ordnung m von g , so folgt die Beschränktheit von $f \cdot g^2$ bei $z \rightarrow z_0$, so daß die Singularität z_0 von $f \cdot g^2$ hebbar ist. Erst recht hat $f \cdot g$ bei z_0 keine Singularität, mithin sind ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 auf Ω holomorph. Die Gültigkeit

von (I) rechnet man nach.

Seien umgekehrt ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 holomorphe Lösungen von (I) nicht vom Typ

$$\phi_1 = i \phi_2, \quad \phi_3 = 0.$$

Man setzt dann (multipliziere die 2te Gleichung aus (I) mit $-i$ und addiere zur ersten $\Rightarrow f$)

$$f := \phi_1 - i \phi_2 \quad (\text{holomorph}),$$

$$g := \phi_3 / (\phi_1 - i \phi_2) \quad (\text{meromorph}).$$

Aus (I) folgt

$$(\phi_1 - i \phi_2) \cdot (\phi_1 + i \phi_2) = -\phi_3^2,$$

also

$$\phi_1 + i \phi_2 = -\phi_3^2 / (\phi_1 - i \phi_2) = -f \cdot g^2.$$

Die linke Seite ist auf Ω holomorph, also ist $f \cdot g^2$ holomorph, und das ist nur möglich, wenn f in den Polen von g mindestens eine Nullstelle der doppelten Ordnung hat.

Daß schließlich mit den oben definierten Funktionen f, g die Beziehungen (II) bestehen, rechnet man einfach nach.

ZUSATZ: (über das Nichtvorhandensein von Verzweigungspunkten)

Sind f, g wie im Satz und gilt zusätzlich, daß f in jedem Pol von g der Ordnung m eine Nullstelle der Ordnung genau $2 \cdot m$

hat und daß die Nullstellen von f genau die Polstellen von g sind,
 so ist $\mathbb{F}$ ohne Verzweigungspunkte.

Beweis: z ist genau dann Verzweigungspunkt von $\mathbb{F}$, wenn

$$|\phi_1(z)|^2 + |\phi_2(z)|^2 + |\phi_3(z)|^2 = 0$$

gilt, wobei ϕ_k , $k=1,2,3$, mit f und g gemäß (II) erklärt sind.

Speziell ist (vgl. die vorige Rechnung)

$$0 = \phi_1(z) + i \phi_2(z) = -f(z) \cdot g^2(z)$$

und auch

$$0 = \phi_1(z) - i \phi_2(z) = f(z).$$

Mithin ist z Nullstelle von f (der Ordnung $2m$) und daher Pol von g der Ordnung m . Vermöge dieser Ordnungsbeziehungen kann $f(z) g^2(z)$ aber nicht verschwinden. ■

BEISPIEL: $f(z) = z^2$, $g(z) = \frac{1}{z}$,

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2}(z^2 - 1), \quad \phi_2(z) = \frac{i}{2}(z^2 + 1), \quad \phi_3(z) = z,$$

$$\mathbb{F}_1(z) = \operatorname{Re} \int_0^z \frac{1}{2}(\xi^2 - 1) d\xi = \operatorname{Re} \left(\frac{\xi^3}{6} - \frac{1}{2}\xi \right),$$

$$\mathbb{F}_2(z) = \operatorname{Re} \int_0^z \frac{i}{2}(\xi^2 + 1) d\xi = \operatorname{Re} i \left(\frac{\xi^3}{6} + \frac{1}{2}\xi \right),$$

$$\mathbb{F}_3(z) = \operatorname{Re} \int_0^z \xi d\xi, \quad \text{also}$$

$$F_1(x, y) = \frac{1}{6} (x^3 - 3xy^2) - \frac{1}{2}x,$$

$$F_2(x, y) = \frac{1}{6} (y^3 - 3x^2y) - \frac{1}{2}y, \quad F_3(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 - y^2)$$

Das ist bis auf Ähnlichkeiten die sogenannte Enneper'sche Minimalfläche, die man z.B. bei Do Carmo, p. 205, abgebildet findet. Man vergleiche dazu auch [K. Leichtweiß "Minimalflächen im Großen", BI Überblick Mathematik Bd 2, 1969]. Die Enneper Fläche ist ohne Verzweigungspunkte (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 haben keine gemeinsamen Nullstellen), allerdings treten Selbstdurchschneidungen auf ($\rightarrow$ Do Carmo, p. 206).

□

Die vorstehenden Überlegungen haben mehrfach ausgenutzt, daß man lokal konforme Parameter einführen kann. Ob dies aber tatsächlich geht, ist nicht ganz offensichtlich. Tatsächlich kann man auf jeder Fläche lokal konforme Koordinatensysteme einführen, eine Ausarbeitung findet man z.B. bei L. Bers, "Riemann Surfaces" Seite 15-35. Wir begnügen uns damit, den Existenzbeweis für Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung zu führen, die Argumente sind dann wesentlich einfacher.

SATZ 3.2: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei regulär, d.h. injektiv, glatt und mit maximalem Rang. Außerdem sei die mittlere Krümmung von $S = F(\Omega)$ identisch 0. Dann hat jeder Punkt $p \in S$ eine Umgebung U , so daß $U \cap S$ über einem Gebiet der Ebene konform parametrisiert werden kann.

Beweis: Sei $p \in S$ beliebig. Da die vorgegebene Parametrisierung überall

Rang 2 hat, kann man S so im Raum $\mathbb{R}^3$ drehen, daß S lokal bei p Graph einer Funktion $f(x_1, x_2)$ ist, d.h. man findet

$$D_R(a) := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < R^2 \}$$

und $f: D_R(a) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$S \cap U(p) = \{ (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in D_R(a) \}$$

für eine geeignete Umgebung $U(p) \subset \mathbb{R}^3$ von p . Hierbei ist zu beachten, daß die mittlere Krümmung eine gegen Rotationen invariante Größe ist und daß man konforme Parametrisierungen mit Rotationen vertauschen kann, ohne die Konformität zu zerstören.

Man setzt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &:= (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (1 + (\partial_1 f)^2), \\ \mathcal{I}_2 &:= (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \partial_1 f \cdot \partial_2 f \end{aligned} \quad \text{auf } D_R(a)$$

und hat

$$\begin{aligned} \partial_2 \mathcal{I}_1 - \partial_1 \mathcal{I}_2 &= -\frac{1}{2} (1 + |\nabla f|^2)^{-3/2} \cdot \left[2 \cdot \partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_2 f \cdot (1 + (\partial_1 f)^2) \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot \partial_2 f \cdot \partial_2 \partial_2 f \cdot (1 + (\partial_1 f)^2) - \partial_1 f \cdot \partial_2 f \cdot 2 \cdot \partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_1 f - 2 \cdot \partial_1 f \cdot \partial_2 f \cdot \partial_2 f \cdot \partial_2 \partial_2 f \right] \\ &\quad + (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \left[2 \cdot \partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_2 f - \partial_1 \partial_1 f \cdot \partial_2 f - \partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_2 f \right] = \\ &= -\frac{1}{2} (1 + |\nabla f|^2)^{-3/2} \cdot \left[2 \cdot \partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_2 f \cdot (1 + (\partial_1 f)^2) + 2 \cdot \partial_2 f \cdot \partial_2 \partial_2 f \cdot (1 + (\partial_1 f)^2) \right. \\ &\quad \left. - 2 (\partial_1 f)^2 \partial_2 f \cdot \partial_1 \partial_1 f - 2 (\partial_2 f)^2 \cdot \partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_2 f \right] \end{aligned}$$

$$-4 \partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_2 f \cdot (1 + |\nabla f|^2) + 2 \cdot (1 + |\nabla f|^2) \cdot \partial_1 \partial_1 f \cdot \partial_2 f \\ + 2 \cdot (1 + |\nabla f|^2) \partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_2 f \quad]$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (1 + |\nabla f|^2)^{-3/2} \cdot [2 \cdot \partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_2 f \cdot \{ (1 + (\partial_1 f)^2) - (\partial_2 f)^2 - 2(1 + |\nabla f|^2) \\ + (1 + |\nabla f|^2) \}$$

$$+ 2 \cdot \partial_2 f \cdot \partial_2 \partial_2 f \cdot (1 + (\partial_1 f)^2)$$

$$+ \partial_2 f \cdot \partial_1 \partial_1 f \cdot \{ -2(\partial_1 f)^2 + 2 \cdot (1 + |\nabla f|^2) \} \quad]$$

$$= -\frac{1}{2} (1 + |\nabla f|^2)^{-3/2} \cdot [2 \cdot \partial_1 f \cdot \partial_1 \partial_2 f \cdot (-2 \cdot (\partial_2 f)^2)$$

$$+ 2 \cdot \partial_2 f \cdot \partial_2 \partial_2 f \cdot (1 + (\partial_1 f)^2)$$

$$+ 2 \cdot \partial_2 f \cdot \partial_1 \partial_1 f \cdot (1 + (\partial_2 f)^2) \quad]$$

$$= -\partial_2 f \cdot (1 + |\nabla f|^2)^{-3/2} \cdot [-2 \cdot \partial_1 f \cdot \partial_2 f \cdot \partial_1 \partial_2 f$$

$$+ \partial_1 \partial_1 f \cdot (1 + (\partial_2 f)^2) + \partial_2 \partial_2 f \cdot (1 + (\partial_1 f)^2) \quad]$$

$$= 0,$$

denn in [...] steht ja gerade die nichtparametrische Minimalflächengleichung für f .

Aus $\partial_2 \mathcal{I}_1 = \partial_1 \mathcal{I}_2$ folgt: es gibt eine (bis auf Konstanten eindeutige) Potentialfunktion

$$\Phi : D_{\mathbb{R}}(a) \rightarrow \mathbb{R},$$

d.h.

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_1 \Phi = \mathcal{P}_1 = (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \cdot (1 + (\partial_1 f)^2), \\ \partial_2 \Phi = \mathcal{P}_2 = (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \cdot \partial_1 f \cdot \partial_2 f, \end{cases}$$

die man sofort explizit angeben kann. Im Fall $(a_1, a_2) = (0, 0)$ (sonst nehme man eine Translation vor) ist zum Beispiel

$$\Phi(x_1, x_2) := \int_0^1 (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)(tx_1, tx_2) \cdot (x_1, x_2) dt$$

eine mögliche Wahl, denn

$$\begin{aligned} \partial_1 \Phi(x_1, x_2) &= \int_0^1 \left\{ t \cdot (\partial_1 \mathcal{P}_1, \partial_1 \mathcal{P}_2)(tx_1, tx_2) \cdot (x_1, x_2) \right. \\ &\quad \left. + (1, 0) \cdot (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)(tx_1, tx_2) \right\} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ \mathcal{P}_1(tx_1, tx_2) + (x_1 \cdot \partial_1 \mathcal{P}_1(tx_1, tx_2) + x_2 \cdot \partial_1 \mathcal{P}_2(tx_1, tx_2)) \cdot t \right\} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ \mathcal{P}_1(tx_1, tx_2) + \underbrace{(x_1 \cdot \partial_1 \mathcal{P}_1(\dots) + x_2 \cdot \partial_2 \mathcal{P}_1(\dots))}_{= \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{P}_1(tx_1, tx_2))} \cdot t \right\} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ \mathcal{P}_1(tx_1, tx_2) + t \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{P}_1(tx_1, tx_2)) \right\} dt \\ &= (\text{part. Int.}) = \mathcal{P}_1(x_1, x_2), \end{aligned}$$

und entsprechend $\partial_2 \Phi = \mathcal{P}_2$.

Analog zu $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ definieren wir weiter die Funktionen

$$\rho_1 := (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \partial_1 f \cdot \partial_2 f, \quad \rho_2 := (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (1 + (\partial_2 f)^2)$$

und schließen wie oben auf die Existenz von

$$\Psi: D_R(a) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \nabla \Psi = (\rho_1, \rho_2),$$

d.h.

$$(2) \quad \begin{cases} \partial_1 \Psi = (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \partial_1 f \partial_2 f \\ \partial_2 \Psi = (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (1 + (\partial_2 f)^2) \end{cases}$$

Sei

$$\begin{aligned} \Lambda(x_1, x_2) &= (x_1 + \Phi(x_1, x_2), x_2 + \Psi(x_1, x_2)), \\ (x_1, x_2) &\in D_R(a). \end{aligned}$$

Wir berechnen die Funktionaldeterminante:

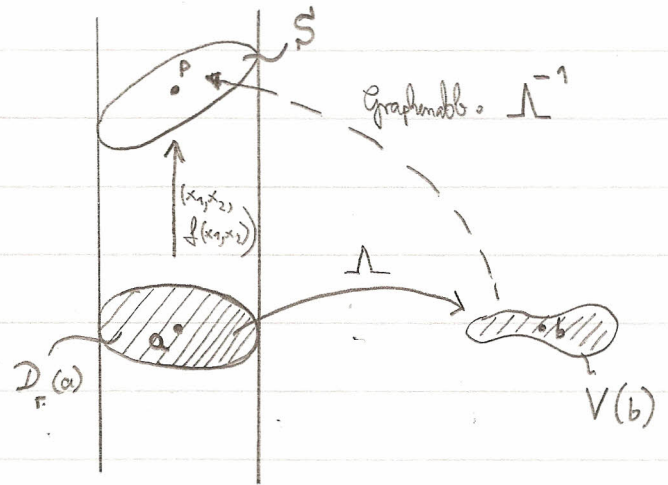
$$\begin{aligned} \det D\Lambda(x_1, x_2) &= \partial_1 \Lambda_1 \cdot \partial_2 \Lambda_2 - \partial_1 \Lambda_2 \cdot \partial_2 \Lambda_1 \Big|_{(x_1, x_2)} \\ &= \left(1 + (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \cdot (1 + (\partial_1 f)^2)\right) \cdot \left(1 + (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (1 + (\partial_2 f)^2)\right) \\ &\quad - (1 + |\nabla f|^2)^{-1} \cdot (\partial_1 f)^2 \cdot (\partial_2 f)^2 \\ &= 1 + (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (2 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2) \\ &\quad + (1 + |\nabla f|^2)^{-1} \cdot (1 + (\partial_1 f)^2) (1 + (\partial_2 f)^2) \\ &\quad - (1 + |\nabla f|^2)^{-1} (\partial_1 f)^2 \cdot (\partial_2 f)^2 > 1, \end{aligned}$$

so daß Λ insbesondere eine kleinere Kreisscheibe $D_r(a)$ diffeomorph auf eine Umgebung $V(b)$ des Punktes $b = \Lambda(a)$ abbildet.
(Tatsächlich ist Λ sogar besser $\rightarrow$ vgl. Lemma 5.4)

Schließlich betrachten wir die Abbildung

$$\chi: V(b) \ni (\xi_1, \xi_2) \rightarrow \left(\left(\Lambda|_{D_r(a)} \right)^{-1}(\xi_1, \xi_2), \downarrow \circ \left(\Lambda|_{D_r(a)} \right)^{-1}(\xi_1, \xi_2) \right)$$

Nach Konstruktion ist klar, daß χ den Bereich $V(b)$ auf eine Umgebung von p in S abbildet, nämlich auf genau den Teil von S im Okus-zylinder $D_r(a) \times \mathbb{R}$ über der verkleinerten Okuscheibe $D_r(a)$.



Weiterhin ist offensichtlich, daß χ überall den maximal möglichen Rang 2 hat, denn dies gilt für die Graphmabbildung und diese wird von rechts mit dem Diffomorphismus $\left(\Lambda|_{D_r(a)} \right)^{-1}$ verknüpft.

Nachzurechnen bleiben die Konformitätsrelationen:

$$\text{Es gilt} \quad (z_1, z_2) = \left(\Lambda|_{D_r(a)} \right)^{-1}(\xi_1, \xi_2)$$

$$D \left(\Lambda|_{D_r(a)} \right)^{-1}(\xi_1, \xi_2) = \left(D \Lambda(z_1, z_2) \right)^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 + (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (1 + (z_1 f)^2) & (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \partial_1 f \cdot \partial_2 f \\ (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \partial_1 f \cdot \partial_2 f & 1 + (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (1 + (z_2 f)^2) \end{pmatrix}^{-1} \Big|_{(z_1, z_2)}$$

$$= \frac{1}{\det(\dots)} \begin{pmatrix} 1 + (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (1 + (z_2 f)^2) & - (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \partial_1 f \cdot \partial_2 f \\ - (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \partial_1 f \cdot \partial_2 f & 1 + (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (1 + (z_1 f)^2) \end{pmatrix} \Big|_{(z_1, z_2)}$$

und

$$D \left(f \circ (\Lambda|_{D_r(a)})^{-1} \right) (\xi_1, \xi_2) =$$

$$Df(\eta_1, \eta_2) \circ D(\Lambda|_{D_r(a)})^{-1}(\xi_1, \xi_2) =$$

$$(\det D\Lambda(\eta_1, \eta_2))^{-1} \cdot (\partial_1 f, \partial_2 f)|_{(\eta_1, \eta_2)} \circ \begin{pmatrix} * \\ \vdots \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} (\det D\Lambda(\eta_1, \eta_2))^{-1} \cdot \left(\partial_1 f + \partial_1 f \cdot (1 + (\partial_2 f)^2) (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \right. \\ \left. - \partial_1 f \cdot (\partial_2 f)^2 (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2}, \right. \\ \left. - (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \partial_2 f (\partial_1 f)^2 + \partial_2 f + \partial_2 f (1 + (\partial_1 f)^2) (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \right) \end{aligned}$$

$$= (\det D\Lambda(\eta_1, \eta_2))^{-1} \cdot \left(\partial_1 f [1 + (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2}], \partial_2 f [1 + (1 + |\nabla f|^2)^{1/2}] \right)$$

$$= \frac{1 + (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2}}{\det D\Lambda(\eta_1, \eta_2)} (\partial_1 f, \partial_2 f).$$

Daraus folgt:

$$D\chi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\det D\Lambda(\eta_1, \eta_2)} \begin{pmatrix} 1 + (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (1 + (\partial_2 f)^2) & - (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \partial_1 f \partial_2 f \\ - (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \partial_1 f \cdot \partial_2 f & 1 + (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (1 + (\partial_1 f)^2) \\ \underbrace{\{ 1 + (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \} \cdot \partial_1 f}_{=: X} & \underbrace{(1 + (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2}) \partial_2 f}_{=: Y} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X \cdot Y =$$

72

$$\begin{aligned}
& - (1+|\nabla f|^2)^{-1/2} \partial_1 f \cdot \partial_2 f - \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (1+(\partial_2 f)^2) \partial_1 f \cdot \partial_2 f \\
& - (1+|\nabla f|^2)^{-1/2} \partial_1 f \cdot \partial_2 f - \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (1+(\partial_1 f)^2) \partial_1 f \cdot \partial_2 f \\
& + \partial_1 f \cdot \partial_2 f \cdot \left\{ 1 + 2 \cdot (1+|\nabla f|^2)^{-1/2} + \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \cdot \partial_1 f \cdot \partial_2 f (1+|\nabla f|^2)^{-1/2} - \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (1 + (1+|\nabla f|^2)) \partial_1 f \cdot \partial_2 f \\
& + \partial_1 f \cdot \partial_2 f \cdot \left\{ 1 + 2 \cdot (1+|\nabla f|^2)^{-1/2} + \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \right\} \equiv 0,
\end{aligned}$$

$$|X|^2 - |Y|^2 =$$

$$\begin{aligned}
& 1 + 2 \cdot \frac{1+(\partial_2 f)^2}{1+|\nabla f|^2} + \frac{(1+(\partial_2 f)^2)^2}{1+|\nabla f|^2} + (\partial_1 f)^2 \cdot (\partial_2 f)^2 \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \\
& + (\partial_1 f)^2 \cdot \left(1 + 2 \frac{1}{1+|\nabla f|^2} + \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(1 + 2 \cdot \frac{1+(\partial_1 f)^2}{1+|\nabla f|^2} + \frac{(1+(\partial_1 f)^2)^2}{1+|\nabla f|^2} + (\partial_1 f)^2 (\partial_2 f)^2 \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \right. \\
& \left. + (\partial_2 f)^2 \cdot \left\{ 1 + 2 \cdot \frac{1}{1+|\nabla f|^2} + \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \right\} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = 2 \cdot \frac{1+(\partial_2 f)^2}{1+|\nabla f|^2} + \frac{(1+(\partial_2 f)^2)^2}{1+|\nabla f|^2} + (\partial_1 f)^2 \cdot \left[1 + \frac{2}{1+|\nabla f|^2} + \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \right] \\
& - 2 \cdot \frac{1+(\partial_1 f)^2}{1+|\nabla f|^2} - \frac{(1+(\partial_1 f)^2)^2}{1+|\nabla f|^2} - (\partial_2 f)^2 [\dots]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \frac{1 + (\partial_2 f)^2 - 1 - (\partial_1 f)^2}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} + \frac{(1 + (\partial_2 f)^2)^2 + (\partial_1 f)^2 - (1 + (\partial_1 f)^2)^2 - (\partial_2 f)^2}{1 + |\nabla f|^2} \\
&\quad + (\partial_1 f)^2 - (\partial_2 f)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + |\nabla f|^2)^{-1} \cdot (1 + (\partial_2 f)^2 + (\partial_2 f)^4 - 1 - (\partial_1 f)^2 - (\partial_1 f)^4) \\
&\quad + (\partial_1 f)^2 - (\partial_2 f)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + |\nabla f|^2)^{-1} \left((\partial_2 f)^2 + (\partial_2 f)^4 - (\partial_1 f)^2 - (\partial_1 f)^4 \right. \\
&\quad \left. + (\partial_1 f)^2 \cdot (1 + |\nabla f|^2) - (\partial_2 f)^2 (1 + |\nabla f|^2) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + |\nabla f|^2)^{-1} \left((\partial_2 f)^2 + (\partial_2 f)^4 - (\partial_1 f)^2 - (\partial_1 f)^4 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_1 f)^2 \cdot (\partial_2 f)^2 + (\partial_1 f)^4 \right. \\
&\quad \left. - (\partial_2 f)^2 - (\partial_2 f)^2 \cdot (\partial_1 f)^2 - (\partial_2 f)^4 \right)
\end{aligned}$$

$$\equiv 0$$

Die Rechnung zeigt

$$\partial_1 X \cdot \partial_2 X = 0, \quad |\partial_1 X| = |\partial_2 X|,$$

so daß X eine konforme Parametrisierung von S bei p ist.

Als Anwendung bekommt man

SATZ 3.3 : Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung. Dann ist f reell analytisch.

Beweis: Sei $(x_0, y_0) \in \Omega$ beliebig. Nach den Überlegungen aus dem vorigen Satz gibt es eine kleine Kreisscheibe $D_r(x_0, y_0)$, eine offene Menge $O \subset \mathbb{R}^2$ und einen C^2 -Diffeomorphismus $\Lambda: D_r(x_0, y_0) \rightarrow O$, so daß

$$X := (\Lambda^{-1}, f \circ \Lambda^{-1}): O \rightarrow \mathbb{R}$$

die Fläche G_f lokal bei $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ konform parametrisiert.

(Bemerkung: Λ ist so regulär wie die beiden Funktionen Φ, Ψ ; aus den Formeln (1), (2) folgt, daß die Ableitungen von Φ, Ψ nur erste Ableitungen von f enthalten. Für C^2 -Funktionen f sind also auch Φ, Ψ von der Klasse C^2 .) Nach Lemma 3.2 gilt

$$\Delta X = \Delta(X^1, X^2, X^3) = 0,$$

die anschließende Proposition ergibt: X^1, X^2, X^3 sind reell analytisch.

Insbesondere ist Λ^{-1} reell analytisch (genauer: jede Komponente von Λ^{-1}) und damit auch Λ selbst. Die Analytizität von $X^3 = f \circ \Lambda^{-1}$ ergibt:

$$f = (f \circ \Lambda^{-1}) \circ \Lambda \in C^\omega,$$

Was zu zeigen war. ■

PROPOSITION: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 eine harmonische Funktion. Dann ist h reell analytisch.

Beweis: Sei $D_r(x_0, y_0) \subset \Omega$. Man sucht eine Funktion $H: D_r(x_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ so, daß

$$f := h + i H : D_r(x_0, y_0) \longrightarrow \mathbb{C}$$

auf dem Kreis holomorph wird. Die Analytizität von f liefert dann sofort die von h .

Sei $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Man setzt an (unterstellt H existiert)

$$H(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} H(tx, ty) dt + H(0, 0) =$$

$$\int_0^1 x \cdot (\partial_x H)(tx, ty) + y \cdot (\partial_y H)(tx, ty) + H(0, 0) =$$

$$\int_0^1 x \cdot (-\partial_y h)(tx, ty) + y \cdot (\partial_x h)(tx, ty) + H(0, 0)$$

nach dem C.-R. Dglm. Da die Konstante $H(0, 0)$ unwesentlich ist, wird man auf folgende Definition geführt:

$$H(x, y) = \int_0^1 x(-\partial_y h)(tx, ty) + y(\partial_x h)(tx, ty) dt$$

Zu überprüfen ist, ob für $f := h + i H$ nun wirklich die C.R. Dglm gelten:

$$\frac{\partial}{\partial x} H(x, y) = \int_0^1 (-\partial_y h)(tx, ty) - x \cdot (\partial_x \partial_y h)(tx, ty) \cdot t + t y (\partial_x \partial_x h)(tx, ty) dt$$

$$\stackrel{h \text{ harmonisch}}{=} \int_0^1 (-\partial_y h)(tx, ty) - x t (\partial_x \partial_y h)(tx, ty) - t (\partial_y \partial_y h)(tx, ty) y dt$$

$$\text{Es ist } \frac{\partial}{\partial t} (\partial_y h(tx, ty)) = x \cdot (\partial_x \partial_y h)(tx, ty) + y \cdot (\partial_y \partial_y h)(tx, ty),$$

also

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} H(x, y) &= \int_0^1 (-\partial_y h)(tx, ty) - t \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\partial_y h(tx, ty)) dt \\ &= -\partial_y h(x, y), \end{aligned}$$

und mit demselben Argument folgt $\frac{\partial}{\partial y} H = \frac{\partial h}{\partial x}$.

BEMERKUNG: H heißt zu h konjugiert harmonische Funktion. H existiert lokal immer und ist bis auf additive Konstanten eindeutig, auf einfach zusammenhängenden Gebieten findet man global konjugiert harmonische Funktionen. Umgekehrt gilt (C.R. Differentialgleichungen): ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so sind $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ natürlich harmonisch.

§ 4 Der Satz von Bernstein

In diesem Abschnitt geht es um den sogenannten Satz von Bernstein (1916 formuliert und 1927 in Math. Z. 26 erschienen) und damit zusammenhängende Folgerungen. Der Satz lautet (vgl. Nitsche, § 130)

SATZ 4.1 : (Bernstein)

Eine ganze C^2 -Lösung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ der nichtparametrischen Minimalflächengleichung ist affin linear, d.h. der f zugeordnete Graph G_f ist eine Ebene in $\mathbb{R}^3$.

BEMERKUNGEN: 1) Der Terminus "ganze Lösung" bezieht sich darauf, daß f auf der ganzen Ebene erklärt ist und dort die nichtparametrische Minimalflächengleichung löst.

2) Der Bernstein Satz erinnert in seiner Konzeption etwas an den bekannten Satz von Liouville über ganze holomorphe Funktionen $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, der sagt:

$$F \text{ beschränkt} \implies F \equiv \text{const.}$$

Als Folgerung des Liouville'schen Satzes bekommt man den

Liouville Satz für
harmonische Funktionen }

Ist $h: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ Lösung von $\Delta h = 0$ und zudem beschränkt, so muß h konstant sein.

Gleichzeitig gibt es durchaus nichtkonstante und nicht affin lineare ganze Lösungen von

$$\Delta h \equiv 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2,$$

d.h. aus dem Erfülltsein der linearen Laplace Gleichung alleine läßt sich über die Struktur der Lösung noch keine Information gewinnen. Der Bernstein Satz zeigt, daß Lösungen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen ein vom linearen Fall völlig abweichendes Verhalten zeigen können.

3) Statt Minimalflächen $S \subset \mathbb{R}^3$ zu betrachten kann man allgemeiner n -dimensionale minimale Hyperflächen im Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ studieren. Zum Beispiel ist der Graph von $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann lokal minimal in $\mathbb{R}^{n+1}$, wenn

$$* \quad \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = 0 \quad \text{auf } \Omega$$

gilt, und viele Autoren haben sich mit der naheliegenden Frage befaßt, ob der Bernstein Satz auf ganze Lösungen von $*$ ausgedehnt werden kann. Dies gelang schrittweise für $n \leq 7$ z.B. Almgren, De Giorgi, Simons, in Dimensionen $n > 7$ gibt es jedoch Gegenbeispiele zum Bernstein Satz! (vgl. Mitsche §130 für Literatur.)

□

Mit Vorkenntnissen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen kann man Satz 4.1 auf elegantem Weg beweisen, wir bevorzugen eine schrittweise elementare Darstellung, die auf einer genauen Analyse der Abbildungseigenschaften des im Beweis von Satz 3.2 eingeführten Diffeomorphismus Λ beruht: das Bild von $D_R(a)$ unter Λ enthält insbesondere eine Kreisscheibe um $\Lambda(a)$ mit Radius R .

Das ist die Aussage von Lemma 4., die ihrerseits aus einigen

einfachen Sachverhalten für konvexe Funktionen folgt.

LEMMA 4.1 : Sei $E : D \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 auf der konvexen Menge $D \subset \mathbb{R}^2$. Die Hesse Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 2}$$

sei in jedem Punkt positiv definit. Dann gilt:

$$(1) \quad (x-y) \cdot (\nabla E(x) - \nabla E(y)) > 0$$

für alle $x \neq y$ aus D .

Beweis: Mit $e(t) := E(t \cdot x + (1-t) \cdot y)$ ist

$$e'(1) - e'(0) = \nabla E(x) \cdot (x-y) - \nabla E(y) \cdot (x-y) \quad \text{und}$$

$$e''(t) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j} (tx + (1-t)y) (x_i - y_i) (x_j - y_j) > 0$$

für $1 \geq t \geq 0$, also $e'(1) > e'(0)$. ■

LEMMA 4.2: Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.1 sei

$$\Omega := \text{Id} + \nabla E : D \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + \partial_1 E(x_1, x_2), x_2 + \partial_2 E(x_1, x_2)).$$

Dann ist für alle $x \neq y$ aus D

$$(2) \quad (\Omega(x) - \Omega(y)) \cdot (x-y) > |x-y|^2$$

$$(3) \quad |\Omega(x) - \Omega(y)| > |x-y|.$$

Beweis: (2) sieht man direkt aus (1)

$$(\Omega(x) - \Omega(y)) \cdot (x-y) = (\nabla E(x) - \nabla E(y)) \cdot (x-y) + |x-y|^2 > |x-y|^2,$$

und (3) folgt, wenn man die linke Seite von (2) nach oben mit der Ungleichung von Cauchy Schwarz abschätzt. ■

LEMMA 4.3: Mit den Notationen aus Lemma 5.1 + 5.2 sei D_R die Kreisscheibe vom Radius R um 0 . Dann ist Ω ein Diffeomorphismus von D_R auf ein Gebiet $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$, und es gilt:

$$(4) \quad \mathcal{G} \supset D_R(\Omega(0)),$$

d.h. $\mathcal{G}$ enthält eine Kreisscheibe mit Radius R um $\Omega(0)$.

Beweis: Nach (3) ist Ω injektiv, es gilt für die 1te Ableitung

$$D\Omega(x_0, y_0) = Id + D^2E(x_0, y_0),$$

so daß insbesondere $\det D\Omega(x_0, y_0) > 0$ ist. Zusammen mit der Injektivität folgt, daß Ω ein globaler Diffeomorphismus von D auf $\mathcal{G} := \Omega(D_R)$ ist. (4) ist klar, wenn $\mathcal{G}$ die ganze Ebene ist.

Andernfalls existiert ein Punkt $\xi \in \mathbb{R}^2 - G$ (abgeschlossen!) mit

$$|\xi - \Omega(o)| = \inf_{\eta \in \mathbb{R}^2 - G} |\eta - \Omega(o)|.$$

Natürlich ist $\xi \in \partial(\mathbb{R}^2 - G) = \partial G$, und man findet $\xi^k \in G$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi^k = \xi.$$

Sei $x^k \in D_R$ mit $\xi^k = \Omega(x^k)$. $\{x^k\}$ ist beschränkt

in $\mathbb{R}^2$, hat also eine konvergente Teilfolge, die wir wieder $\{x^k\}$ nennen, also

$$x^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x.$$

für einen Punkt $x \in \overline{D_R}$. Offenbar ist $x \notin D_R$, denn sonst hätte man den Widerspruch $\xi = \Omega(x) \in G$. Also ist $|x| = R$, d.h.

$$|x^k| \rightarrow R,$$

(3) liefert $|\Omega(x^k) - \Omega(o)| > |x^k|$, mithin

$$|\xi - \Omega(o)| \geq R.$$

Ist also $\xi^1 \in D_R(\xi(o))$, d.h. $|\xi^1 - \Omega(o)| < R$, so kann ξ^1 nicht in $\mathbb{R}^2 - G$ liegen (da $\inf \{|\eta - \Omega(o)| : \eta \notin G\} \geq R$), wie bekommen (4). □

LEMMA 4.4: Sei $f: D_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$ Lösung der nicht-parametrischen Minimalflächengleichung auf der offenen Kreisscheibe vom Radius R um den Ursprung. Man setzt wie im Beweis von Satz 3.2

$$\Lambda(x) = x + (\Phi(x), \Psi(x)), \quad x \in D_R,$$

mit Φ, Ψ definiert durch

$$\begin{aligned} \partial_1 \Phi &= (1 + |df|^2)^{-1/2} \cdot (1 + (\partial_1 f)^2), \\ \partial_2 \Phi &= (1 + |df|^2)^{-1/2} \cdot \partial_1 f \cdot \partial_2 f, \\ \partial_1 \Psi &= (1 + |df|^2)^{-1/2} \cdot \partial_1 f \cdot \partial_2 f, \\ \partial_2 \Psi &= (1 + |df|^2)^{-1/2} \cdot (1 + (\partial_2 f)^2). \end{aligned}$$

Dann ist Λ ein Diffeomorphismus $D_R \rightarrow \mathcal{G} := \Lambda(D_R)$ mit

$$\mathcal{G} \supset D_R(\Lambda(0)).$$

Beweis: Gemäß $\partial_2 \Phi = \partial_1 \Psi$ findet man $E: D_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 mit

$$\nabla E = (\Phi, \Psi)$$

$$\begin{aligned} [\text{Ansatz: } E(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} E(tx) dt \quad (o.E. \quad E(0)=0) \\ &= \int_0^1 x \cdot \nabla E(tx) dt = \int_0^1 (x_1 \cdot \Phi(tx) + x_2 \cdot \Psi(tx)) dt \end{aligned}$$

rechne nach - mit $\partial_2 \Phi = \partial_1 \Psi$ - , daß $\nabla E = (\Phi, \Psi)$ gilt $\square$

Nachrechnung ist die Positivität von D^2E :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial^2 x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi = (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} (1 + (a_1 f)^2)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi = (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} a_1 f \cdot a_2 f, \text{ usw.},$$

so daß für $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j} \eta_i \eta_j &= \\ (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} &\left[\eta_1^2 \cdot (1 + (a_1 f)^2) + \eta_2^2 \cdot (1 + (a_2 f)^2) \right. \\ &\left. + 2 \cdot \eta_1 \eta_2 \cdot a_1 f \cdot a_2 f \right] \end{aligned}$$

$$\geq (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} |\eta|^2$$

gemäß $|2 \eta_1 \eta_2 a_1 f a_2 f| \leq \eta_1^2 \cdot (a_1 f)^2 + \eta_2^2 \cdot (a_2 f)^2.$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 4.3. ■

Beweis des Bernstein'schen Satzes:

Sei Λ wie im vorigen Lemma. Der Definitionsbereich von Λ ist die ganze Ebene $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, und aus Lemma 4.3 folgt, daß Λ ein Diffeomorphismus auf $\mathbb{R}^2$ ist. Dem Beweis von Satz 3.2 entnehmen wir weiter:
 $(x_1, x_2) \rightarrow (\Lambda^{-1}(x_1, x_2), f \circ \Lambda^{-1}(x_1, x_2)) =: U(x_1, x_2)$ ist eine

Konforme Parametrisierung von $S = G_f$

Nach Lemma 3.3 sind

$$\phi_k(\xi) := \frac{\partial U^k}{\partial \xi_1}(\xi) - i \frac{\partial U^k}{\partial \xi_2}(\xi), \quad k=1,2,3,$$

auf $\mathbb{C}$ holomorph mit

$$\operatorname{Im} \{ \overline{\phi_1} \cdot \phi_2 \} = \operatorname{Im} \{ (\partial_1 U^1 + i \partial_2 U^1) \cdot (\partial_1 U^2 - i \partial_2 U^2) \}$$

$$= - \{ \partial_1 U^1 \cdot \partial_2 U^2 - \partial_1 U^2 \cdot \partial_2 U^1 \}$$

$$= - \det D(U^1, U^2) = - \det D\Lambda^{-1}$$

$$= - (\det D\Lambda)^{-1} \Big|_{\Lambda^{-1}} < 0,$$

wobei die letzte Ungleichung aus der strikten Positivität der Funktionaldeterminante von Λ folgt.

Speziell sind ϕ_1, ϕ_2 nullstellenfrei, und

$$\operatorname{Im} \{ \phi_2 / \phi_1 \} = |\phi_1|^{-2} \operatorname{Im} \{ \overline{\phi_1} \phi_2 \} < 0,$$

so daß ϕ_2 / ϕ_1 auf $\mathbb{C}$ holomorph ist und Imaginärteil < 0 hat.

Folglich ist ϕ_2 / ϕ_1 nach einer Variante des Liouville Satzes konstant:

$$z \mapsto \frac{-i \phi_2 / \phi_1(z)}{e} = \frac{-i \operatorname{Re} \{ \phi_2(z) / \phi_1(z) \}}{e} + \frac{\operatorname{Im} \{ \phi_2(z) / \phi_1(z) \}}{e}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C}$ und durch 1 beschränkt, also konstant. Das er-

gibt

$$0 = \frac{d}{dz} e^{-i \phi_2 / \phi_1} = -i \frac{d}{dz} \left\{ \frac{\phi_2}{\phi_1} \right\} e^{-i \phi_2 / \phi_1},$$

und da $\exp$ ohne Nullstelle ist, folgt $\frac{d}{dz} \left\{ \frac{\phi_2}{\phi_1} \right\} = 0$, mithin

$$\phi_2 = c \cdot \phi_1, \quad c = a - ib, \quad b > 0 \quad (\operatorname{Im} \{ \phi_2 / \phi_1 \} < 0).$$

Dies kann man schreiben als

$$\partial_1 u^2 = a \cdot \partial_1 u^1 - b \partial_2 u^1;$$

$$\partial_2 u^2 = b \partial_1 u^1 + a \cdot \partial_2 u^1.$$

Führt man die Koordinatentransformation

$$T_1(y_1, y_2) := y_1, \quad T_2(y_1, y_2) := b^{-1} (y_2 - a \cdot y_1)$$

ein und setzt

$$V^1(x_1, x_2) := T_1 \circ (u^1, u^2)(x_1, x_2), \quad V^2(x_1, x_2) = T_2 \circ (u^1, u^2)(x_1, x_2),$$

so folgt

$$\partial_1 V^1 = \partial_1 u^1, \quad \partial_2 V^2 = \partial_2 \{ b^{-1} (u^2 - a u^1) \} =$$

$$b^{-1} \partial_2 u^2 - a \cdot b^{-1} \partial_2 u^1 = \partial_1 u^1$$

$$\Rightarrow \partial_1 V^1 = \partial_2 V^2,$$

und

$$\partial_2 V^1 = \partial_2 U^1, \quad -\partial_1 V^2 = -(\bar{b}^{-1} \partial_1 U^2 - \bar{b}^{-1} a \partial_1 U^1) = \partial_2 U^1$$

$$\Rightarrow \partial_2 V^1 = -\partial_1 V^2.$$

Also ist $V: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Damit rechnet man leicht nach, daß $u := U \circ V^{-1}$ (V^{-1} steht für die Umkehrabbildung!) ebenfalls konforme Parameterdarstellung von G_f ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} u^1(x_1, x_2) &= U^1 \circ (T \circ (U^1, U^2))^{-1}(x_1, x_2) = \\ &= U^1 \circ (U^1, U^2)^{-1}(T^{-1}(x_1, x_2)) = (U^1 \circ (U^1, U^2))(x_1, ax_1 + bx_2) \\ &= x_1, \end{aligned}$$

$$u^2(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2,$$

mithin haben wir jetzt eine konforme Parametrisierung vom Typ

$$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, ax_1 + bx_2, u^3(x_1, x_2)).$$

Bildet man die dazu gemäß Lemma 3.3 gehörigen holomorphen Funktionen $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3$, so folgt sofort

$$\tilde{\Phi}_1 = \text{const}, \quad \tilde{\Phi}_2 = \text{const}$$

und aus $\sum_{k=1}^3 \tilde{\Phi}_k^2 = 0$ folgt $\tilde{\Phi}_3^2 \equiv \text{const}$. Ist

diese letzte Konstante 0, so folgt $\tilde{\Phi}_3 = 0$. Andernfalls hat $\tilde{\Phi}_3$ keine

Nullstelle. Aus $2, \frac{d}{dz} \tilde{\phi}_3 \cdot \tilde{\phi}_3 = 0$ folgt $\frac{d}{dz} \tilde{\phi}_3 = 0,$

also in jedem Fall $\tilde{\phi}_3 = \text{const.}$ gemäß

$$\tilde{\phi}_3 = \partial_1 u^3 - u \partial_2 u^3$$

ist dann $\nabla u^3 = A \in \mathbb{R}^2$ ein konstanter Vektor und wir können schreiben

$$u^3(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma,$$

d.h.

$$\begin{aligned} G_f &= \{ (x_1, \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \} \\ &= \{ (x_1, x_2, \alpha x_1 + \beta b^{-1}(x_2 - \alpha x_1) + \gamma) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad (x_1, x_2) \rightarrow (x_1, b^{-1}(x_2 - \alpha x_1)) \end{aligned}$$

Daraus liest man ab: $f(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta \cdot b^{-1}(x_2 - \alpha x_1) + \gamma,$

was zu beweisen war. ■

KOROLLAR: Eine beschränkte ganze Lösung der nicht parametrischen Minimalflächengleichung ist konstant.

(denn die Konstanten sind die einzigen beschränkten affin linearen Funktionen)

§5 Folgerungen aus der Struktur der nicht-parametrischen Minimalflächengleichung

In diesem Abschnitt studieren wir das Verhalten von C^2 (und damit reell analytischen) Lösungen der nichtparametrischen Minimalflächengleichung

$$(1) \quad \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = 0$$

auf Gebieten in $\mathbb{R}^2$. Es handelt sich bei (1) um eine nichtlineare partielle Differentialgleichung 2ter Ordnung, für die man trotzdem eine Reihe aus der Theorie der linearen elliptischen Gleichung zweiter Ordnung bekannten Sätze nachmachen kann. Dazu gehören insbesondere sogenannte Maximum-Prinzipium, wo man die Größenordnung der Lösung auf einem Gebiet Ω durch das Verhalten der Randwerte beschreibt. Für einen allgemeinen Zugang vergleiche man etwa das ausgezeichnete Buch von Gilbarg & Trudinger in der Springer Grundvorlesungen. Andererseits impliziert gerade die Nichtlinearität von (1) eine Reihe verblüffender Aussagen: neben dem Bernstein Satz hat man ein Theorem über die Hebbarkeit isolierter Punkte, d.h. gilt (1) nur auf einem punktierten Bereich, so kann man f glatt über den möglichen singulären Punkt hinaus fortsetzen.

SATZ 5.1 : (Maximum-Prinzip)

Seien $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ der Minimalflächengleichung (1) auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Es gelte $f, g \in C^0(\bar{\Omega})$.

Dann gilt:

$$i) \quad f \leq g + M \text{ auf } \partial\Omega \text{ für ein } M \in \mathbb{R} \Rightarrow f \leq g + M \text{ auf } \Omega.$$

ii) $m + f \leq g$ auf $\partial\Omega$ für ein $m \in \mathbb{R} \implies$
 $m + f \leq g$ auf Ω .

KOROLLAR: Das Dirichletproblem zur Minimalflächengleichung auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ hat - wenn überhaupt - nur eine Lösung, d.h. : gibt man eine stetige Funktion $\phi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vor, so gibt es höchstens eine Funktion $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit (1) und $f|_{\partial\Omega} = \phi$ (Dirichlet'sche Randbedingung).

Anmerkung: Das Korollar sagt natürlich gar nichts darüber aus, ob man zu gegebener Randfunktion ϕ lösen kann. Diese Diskussion ist viel schwerer und wird später geführt.

Beweisskizze von Theorem 5.1: Wir beschreiben hier eine Vorgehensweise, nämlich die Wahl geeigneter Testfunktionen, die in der allgemeinen Theorie partieller Differentialgleichungen sehr geläufig ist.

Multipliziert man die Gleichungen (1) für f und g mit einer glatten Funktion Ψ , die auf $\partial\Omega$ verschwindet, so folgt nach Integration über Ω und Anwendung des Gaußschen Satzes nach Subtraktion der resultierenden Identitäten

$$0 = \int_{\Omega} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}} \right) \cdot \nabla \Psi \, dx.$$

Ist $f \leq g + M$ auf $\partial\Omega$, so wählt man

$$\Psi := \max(0, f - g - M).$$

Diese Funktion gehört zu $C^0(\bar{\Omega})$ mit $\Psi = 0$ auf $\partial\Omega$, allerdings ist Ψ im allgemeinen nur Lipschitz stetig. Als Lipschitz Funktion ist Ψ immerhin noch in fast allen Punkten differenzierbar mit

$$\nabla \Psi = (\nabla f - \nabla g) \cdot \chi_{[f > g+M]}$$

fast überall, wo $\chi_{[f > g+M]}$ die charakteristische Funktion der

Menge $\{x \in \Omega: f(x) > g(x) + M\}$ bedeutet. In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen beweist man durch Einführen geeigneter Räume, daß unser Ψ tatsächlich in obiger Integralidentität zugelassen ist, es folgt

$$0 = \int_{[f > g+M]} (\nabla f - \nabla g) \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}} \right) dx.$$

Andererseits ist für $p, q \in \mathbb{R}^2$

$$(p - q) \cdot \left(\frac{p}{\sqrt{1+|p|^2}} - \frac{q}{\sqrt{1+|q|^2}} \right) = \left(\phi(t) = q + t(p - q) \right)$$

$$(p - q) \cdot \int_0^1 \frac{d}{dt} \left((1 + |\phi(t)|^2)^{-1/2} \phi(t) \right) dt =$$

$$\int_0^1 (1 + |\phi(t)|^2)^{-1/2} |p - q|^2 + ((p - q) \cdot \phi(t)) \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot ((p - q) \cdot \phi(t))$$

$$\cdot (1 + |\phi(t)|^2)^{-3/2} dt =$$

$$\int_0^1 (1 + |\phi(t)|^2)^{-1/2} |p - q|^2 - ((p - q) \cdot \phi(t))^2 (1 + |\phi(t)|^2)^{-3/2} dt =$$

$$\int_0^1 (1 + |\phi(t)|^2)^{-3/2} \cdot \left\{ (1 + |\phi(t)|^2) \cdot |p - q|^2 - ((p - q) \cdot \phi(t))^2 \right\} dx \geq$$

$$\geq \int_0^1 (1 + |\phi(t)|^2)^{-3/2} dt \cdot |p - q|^2.$$

Also ist der Integrand in $\int_{[f > g+M]} \dots$ stets ≥ 0 , und

das Verschwinden des Integrals bedeutet demnach

$$(\nabla f - \nabla g) \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}} \right) = 0$$

fast überall auf der Menge $[f > g+M]$. Dies wiederum ist nach der vorstehenden Abschätzung gleichwertig mit

$$\nabla f(x) = \nabla g(x)$$

auf $[f > g+M]$, also $\nabla \Psi = 0$ f.ü. Ψ hat Randwerte 0 auf $\partial\Omega$ und wie bei glatten Funktionen gilt auch hier die Folgerung $\Psi = 0$, also $f \leq g+M$ auf Ω . $\square$

Präziser Beweis von Satz 5.1: Wir folgen dem "Vergleichssatz für quasilineare Gleichungen" aus Gilbarg & Trudinger, Theorem 9.2.

Sei Q der folgende Differentialoperator

$$Q u := \Delta u - \sum_{i,j} (1 + |\nabla u|^2)^{-1} \partial_i u \partial_j u \partial_i \partial_j u.$$

Offenbar ist $Q u = 0$ gleichwertig mit der nichtparametrischen Minimalflächengleichung (1).

Wir nehmen an :

$$(2) \quad u, v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \quad Qu \geq Qv \text{ auf } \Omega, \\ u \leq v \text{ auf } \partial\Omega$$

und wollen zeigen

$$(3) \quad u \leq v \text{ auf } \Omega.$$

Daraus ergeben sich schnell (durch passende Wahlen von u, v) die Aussagen des vorstehenden Satzes.

Es ist nach (2)

$$\begin{aligned} 0 \leq Qu - Qv &= \Delta(u-v) - \sum_{i,j} (1+|\nabla u|^2)^{-1} \partial_i u \partial_j u \partial_i \partial_j u \\ &\quad + \sum_{i,j} (1+|\nabla v|^2)^{-1} \partial_i v \partial_j v \partial_i \partial_j v \\ &= \Delta(u-v) - \sum_{i,j} (1+|\nabla u|^2)^{-1} \partial_i u \partial_j u \cdot \{ \partial_i \partial_j u - \partial_i \partial_j v \} \\ &\quad + \sum_{i,j} \{ (1+|\nabla v|^2)^{-1} \partial_i v \partial_j v - (1+|\nabla u|^2)^{-1} \partial_i u \partial_j u \} \partial_i \partial_j v \\ &= \sum_{i,j} \left[\delta_{ij} - \frac{\partial_i u \partial_j u}{1+|\nabla u|^2} \right] \partial_i \partial_j (u-v) \\ &\quad + \sum_{i,j} \{ (1+|\nabla v|^2)^{-1} \partial_i v \partial_j v - (1+|\nabla u|^2)^{-1} \partial_i u \partial_j u \} \partial_i \partial_j v. \end{aligned}$$

Seien $a_{ij}(\xi) := \delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{1+|\xi|^2}, \quad w = u-v.$

Dann lautet unser Ergebnis:

$$0 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) \cdot \partial_i \partial_j w \\ + \sum_{i,j} \{a_{ij}(\nabla u) - a_{ij}(\nabla v)\} \partial_i \partial_j v.$$

Mit geeigneten stetigen Funktionen $J_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist

$$a_{ij}(\nabla u) - a_{ij}(\nabla v) = J_{ij} \cdot (\nabla u - \nabla v)$$

$$\left(a_{ij}(p) - a_{ij}(q) = \int_0^1 \frac{d}{dt} a_{ij}(q + t(p-q)) dt = (p-q) \cdot \int_0^1 (\text{grad } a_{ij}) \right. \\ \left. (q + t(p-q)) dt \right)$$

$$\Rightarrow a_{ij}(\nabla u(x)) - a_{ij}(\nabla v(x)) = \int_0^1 (\text{grad } a_{ij})(\nabla v(x) + t(\nabla u(x) - \nabla v(x))) dt \\ \cdot (\nabla u(x) - \nabla v(x)),$$

$$J_{ij}(x) := \int_0^1 (\text{grad } a_{ij})(\nabla v(x) + t(\nabla u(x) - \nabla v(x))) dt \quad \Bigg),$$

also:

$$\sum_{i,j} \{a_{ij}(\nabla u) - a_{ij}(\nabla v)\} \partial_i \partial_j v =$$

$$\sum_{i,j} J_{ij} \cdot (\nabla u - \nabla v) \partial_i \partial_j v =$$

$$\sum_k \left(\sum_{i,j} \partial_i \partial_j v \cdot J_{ij}^k \right) \partial_k w.$$

Setzt man noch

$$b_i(x) := \sum_{l,j} \partial_l \partial_j v(x) \cdot \mathcal{J}_{l,j}^i(x),$$

so bekommen wir die Differentialungleichung

$$(4) \quad 0 \leq \sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \partial_j w + \sum_i b_i \cdot \partial_i w =: L(w).$$

Die Koeffizienten b_i sind per Definition lokal beschränkte, stetige Funktionen auf Ω , und gemäß (2) haben wir die Zusatzinformation $w \leq 0$ auf $\partial\Omega$.

Zum Nachweis der Behauptung (3) nehmen wir an, daß w im Inneren von Ω einen positiven Wert annimmt. $w|_{\partial\Omega} \leq 0$ heißt dann:

$$\sup_{\Omega} w > 0,$$

und es gibt $x_0 \in \Omega$ mit

$$w(x_0) = \sup_{\Omega} w.$$

Insbesondere ist $\nabla w(x_0) = 0$ und $(\partial_i \partial_j w(x_0))_{1 \leq i,j \leq 2}$

negativ semidefinit, also $L(w)(x_0) \leq 0$. Mithin bekommt man

sofort einen Widerspruch, wenn man $Q(u) \geq Q(v)$ durch die stärkere Bedingung $>$ ersetzt, was sich dann in $L(w) > 0$ niederschlägt.

Wie argumentiert man im allgemeinen Fall?

Sei D ein kompakt in Ω enthaltenes Teilgebiet. Sämtliche Koeffizienten des Differentialoperators L sind auf $\overline{D}$ stetig, also insbesondere auch beschränkt. Für das Gebiet Ω ist das nicht klar, denn u, v liegen nur in $C^2(\Omega)$ und nicht in $C^2(\overline{\Omega})$. Man findet jetzt $\lambda > 0, b_0 > 0$ mit

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j$$

für alle Vektoren ξ und Punkte $x \in \overline{D}$ und

$$\sup_{\overline{D}} |b| \cdot \lambda^{-1} \leq b_0.$$

Mit $\gamma > 0$ folgt (beachte $a_{11} \geq \lambda$)

$$\begin{aligned} L(e^{\gamma x_1}) &= (\gamma^2 \cdot a_{11} + \gamma \cdot b_1) \cdot e^{\gamma x_1} \\ &\geq \lambda(\gamma^2 - \gamma \cdot b_0) e^{\gamma x_1} \end{aligned}$$

auf D , und wählt man γ genügend groß, so ist offenbar

$$L(e^{\gamma x_1}) > 0 \quad \text{auf } D.$$

Für alle $\varepsilon > 0$ bekommt man

$$L(w + \varepsilon \cdot e^{\gamma x_1}) > 0 \quad \text{auf } D,$$

und daraus schließt man für $w_\varepsilon := w + \varepsilon \cdot e^{\gamma x_1}$:

$$\sup_{\overline{D}} w_\varepsilon = \sup_{\partial D} w_\varepsilon.$$

Wurde nämlich $\sup_D w_\varepsilon$ in einem Punkt $x_0 \in D$ angenommen,

so hätte man dort wie vorher ja $L(w_\varepsilon)(x_0) \leq 0$.

Mit $\varepsilon \downarrow 0$ impliziert das Randmaximumprinzip aber

$$\sup_D w = \sup_{\partial D} w.$$

Schließlich wählt man für D eine Ausschöpfung von Ω (also eine Folge $D_\nu \subset D_{\nu+1}$, $D_\nu \subset \subset \Omega$, $\bigcup D_\nu = \Omega$), die Stetigkeit von w bis zum Rand von Ω liefert:

$$\sup_{\overline{\Omega}} w = \sup_{\partial \Omega} w \leq 0,$$

und genau das wahr zu zeigen. ■

BEMERKUNGEN: 1) Die vorhandenen Rechnungen haben nirgendwo ausgenutzt, daß wir die nichtparametrische Minimalflächengleichung in nur 2 Dimensionen betrachten. Unser Ergebnis gilt wörtlich für Lösungen $f \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ von

$$\operatorname{div} \left(\nabla f / \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \right) = 0$$

auf beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

2) Ist der Definitionsbereich Ω unbeschränkt und/oder sind die Lösungen f, g der nichtparametrischen nicht stetig bis zum Rand $\partial \Omega$, so zeigt das Ausschöpfungsargument ($D \uparrow \Omega$) immerhin noch das folgende

Vergleichsprinzip:

$$\liminf_{\Omega \ni x \rightarrow \partial\Omega} (f(x) - g(x)) \leq f(y) - g(y) \leq \liminf_{\Omega \ni x \rightarrow \partial\Omega} (f(x) - g(x))$$

für alle $y \in \Omega$.

Hierbei bedeutet $\Omega \ni x \rightarrow \partial\Omega$, daß man sich dem Rand von Ω beliebig annähert.

Der vorstehende Satz 5.1 zeigt, daß sich das aus der Theorie der linearen elliptischen Gleichungen 2^{ter} Ordnung bekannte Maximumprinzip durchaus auf Lösungen der nichtparametrischen Minimalflächengleichung ausdehnen läßt. Die nachfolgende Überlegung macht deutlich, daß man im nichtlinearen Fall oft viel stärkere Aussagen machen kann:

Ist $\Omega = B_R - \overline{B_r}$ ein Kreisring, so lassen sich auf $\partial B_R, \partial B_r$ beliebige stetige Funktionen $\phi: \partial B_R \rightarrow \mathbb{R}, \psi: \partial B_r \rightarrow \mathbb{R}$ vorschreiben, zu denen man eine Lösung $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ des linearen Dirichlet Problems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{auf } \Omega, \\ u|_{\partial B_R} = \phi, \quad u|_{\partial B_r} = \psi \end{cases}$$

konstruieren kann. Bei Minimalflächen ist das völlig anders: läßt sich die Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf der äußeren Sphäre ∂B_R durch ein Katenoid kontrollieren, so gilt diese Abschätzung bereits auf dem ganzen Kreisring, m. a. W.: die Randwerte auf ∂B_r können insbesondere nicht mehr beliebig sein! Die genaue Formulierung findet man in Satz 5.2. Zur Vorbereitung reden wir kurz über

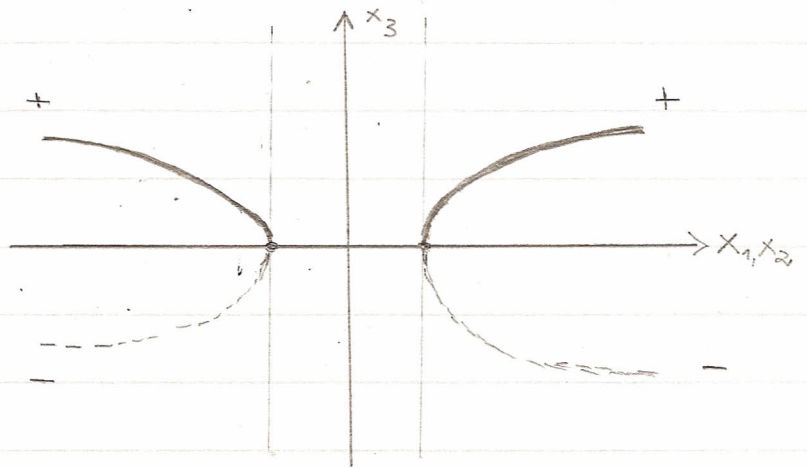
Das Katenoid: wird analytisch beschrieben durch die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 = (\cosh x_3)^2$$

bzw. in Graphenform

$$x_3 = \pm \operatorname{ar} \cosh \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{auf} \quad \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \geq 1\}.$$

Wählt man das Vorzeichen $+$, so heißt der Graph von $x_3 = \operatorname{ar} \cosh \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ oberes Halbkatenoid, sonst unteres Halbkatenoid.



Sei für $r > 0$, $a \in \mathbb{R}$

$$K_{r,a}^+ := \text{Graph von } \underbrace{r \cdot \operatorname{ar} \cosh \left(\frac{1}{r} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) + a}_{=: k_{r,a}^+(x_1, x_2)}$$

und entsprechend

$$K_{r,a}^- := \text{Graph von } \underbrace{-r \cdot \operatorname{ar} \cosh \left(\frac{1}{r} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) + a}_{=: k_{r,a}^-(x_1, x_2)}$$

mit Definitionsbereich $x_1^2 + x_2^2 \geq r^2$. $K_{r,a}^\pm$ gehen durch Ähnlichkeitstransformationen aus dem oberen bzw. unteren Halbkatenoid hervor, die Kon-

stante a bewirkt z.B. eine vertikale Verschiebung, und $k_{r,a}^{\pm}$ lösen auf ihrem Definitionsbereich die nichtparametrische Minimalflächengleichung.

SATZ 5.2: Seien $r_1 < r_2$ gegeben und D ein Gebiet im Kreisring $B_{r_2} - \overline{B_{r_1}}$, z.B. der Kreisring selbst. Sei f eine Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf D .

Gilt dann für ein $a \in \mathbb{R}$

$$\limsup \{ f(x) - k_{r_1,a}^-(x) \} \leq 0$$

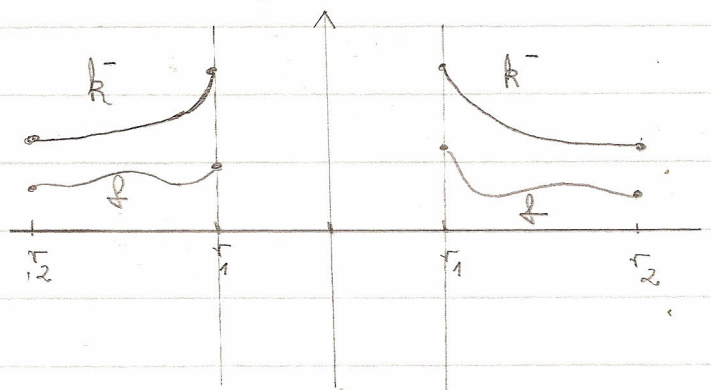
für jede Folge $x \in D$, die gegen einen Randpunkt $x_0 \in \partial D$, $|x_0| > r_1$, konvergiert, so ist

$$f(z) \leq k_{r_1,a}^-(z) \text{ auf } D.$$

BEMERKUNG: Der Spezialfall $D = B_{r_2} - \overline{B_{r_1}}$ verdient besondere Beachtung.

Weiß man

$$f \leq k^-$$



auf dem Rand der äußeren Kreisscheibe, so gilt $f \leq k^-$ auf dem ganzen Ring.

Daraus bekommt man den

Ein schließungssatz für Minimalflächen: Ist $f: B_{r_2} - \overline{B_{r_1}} \rightarrow \mathbb{R}$
 eine Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung und
 bezeichnen $k^\pm$ auf $\mathbb{R}^2 - \overline{B_{r_1}}$ definierte obere bzw.
 untere Halbkatenoide mit

$$k^+ \leq f \leq k^- \quad \text{auf } \partial B_{r_2},$$

so hat man $k^+ \leq f \leq k^-$ auf $B_{r_2} - \overline{B_{r_1}}$.

Beweis von Satz 5.2: Ohne Einschränkung sei $r_1 = 1$, $a = 0$
 und $D = B_{r_2} - \overline{B_1}$. Für $1 < r < r_2$ sei

$$\varepsilon := \sup_{r \leq |x| \leq r_2} |k^-(x) - k_r^-(x)|,$$

$k^-(x) := k_{1,0}^-(x)$, $k_r^-(x) := k_{r,0}^-(x)$ in unserer früheren

Notation. Ferner nehmen wir an, daß f auf $\overline{D}$ stetig ist
 und

$$f \leq k^- \quad \text{auf } \partial B_{r_2}$$

erfüllt.

Fall 1: f ist stetig differenzierbar auf $\overline{D}$

Dann können wir direkt argumentieren und brauchen das Hilfskatenoid
 nicht einzuführen. Gilt sogar $f \leq k^-$ auf ∂B_1 ,

So ist die globale Aussage direkte Folge aus dem Maximum-Prinzip

Satz 5.1.

Ist $f > k^-$ ^{irgendwo} auf ∂B_1 , so wählt man $x_0 \in \partial B_1$ mit

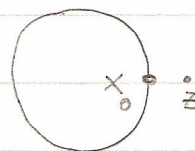
$$(0 <) f(x_0) - k^-(x_0) =: M := \max_{\partial B_1} (f - k^-),$$

und Satz 5.1 impliziert

$$f(x) - k^-(x) \leq M$$

auf dem ganzen Ring D .

Für z mit $|z| > 1$ ist



$$\nabla k^-(z) = - \frac{1}{\sqrt{|z|^2 - 1}} z,$$

also gilt für

$$\Phi(t) := f(tx_0) - k^-(tx_0), \quad t > 1,$$

(beachte: $t \cdot x_0 \in D$ für $t > 1$, $t < r_2$)

offenbar

$$\Phi'(t) = x_0 \cdot \nabla f(tx_0) + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} > 0,$$

denn ∇f ist nach Voraussetzung ja beschränkt. Mithin ist Φ streng wachsend,

$$\Phi(t) > M \quad \text{für } t > 1,$$

was aber $f(x) - k^-(x) \leq M$ auf D widerspricht.

Fall 2: f ist nicht notwendig C^1 auf $\overline{D}$

Dann gilt

$$f - k_r^- \leq \varepsilon \quad \text{auf } \partial B_{r/2}.$$

Sei $D_r := B_{r/2} - \overline{B}_r$. Im Fall

$$f - k_r^- \leq \varepsilon \quad \text{auf } \partial B_r,$$

liefert Satz 5.1

$$* \quad f - k_r^- \leq \varepsilon \quad \text{auf } D_r.$$

Im anderen Fall existiert $x_0 \in \partial B_r$ mit

$$m := f(x_0) - k_r^-(x_0) = \max_{\partial B_r} f - k_r^- > \varepsilon$$

Satz 5.1 ergibt

$$** \quad f - k_r^- \leq m \quad \text{auf } D_r.$$

Gemäß $r > 1$ ist $\nabla f(x_0)$ beschränkt (x_0 ist innerer Punkt von D), durch Betrachten des Gradienten von k_r^- sieht man wie folgt

$$f(x) - k_r^-(x) > f(x_0) - k_r^-(x_0)$$

für alle x aus einer punktierten Umgebung von x_0 in D_r , was ** widerspricht. Die Annahme war falsch, es folgt *. Läßt man r von oben gegen 1 gehen, so folgt aus * sofort $f \leq k^-$ auf D , denn die Katzenide konvergieren gleichmäßig gegeneinander. Die allgemeine Aussage von Satz 5.2 folgt durch ähnliche Betrachtungen. ■

Wir kommen jetzt zum Satz von Bers (1951) [vgl. Nitsche, p. 549, Osserman, Thm. 10.2] über die Erweiterbarkeit isolierter Singularitäten, der sich völlig aus der linearen Theorie heraushebt: Ist D' eine Kreisscheibe um o , aus der der Knapung herausgenommen wurde und

$$u: D' \rightarrow \mathbb{R}$$

eine C^2 -Lösung der linearen Gleichung $\Delta u = 0$ auf D' , so läßt sich die Singularität bei o i.a. nicht heilen, d.h. ohne weitere Voraussetzungen ist es i.a. nicht möglich, u als glatte Lösung in den Knapung hinein fortzusetzen, dies zeigt das Beispiel der Funktion

$$u(x_1, x_2) := \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x_1^2 + x_2^2 > 0.$$

Als Vorbereitung für den Bers'schen Satz beweisen wir zunächst

SATZ 5.3: (Beschränktheit von nichtparametrischen Minimalflächen am isolierten Singularitäten)

Sei f C^2 -Lösung der Minimalflächengleichung auf der punktierten Kreisscheibe

$$B_r(o) - \{o\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x^2 + y^2 < r^2\},$$

außerdem sei f stetig auf $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

Dann gilt:

$$\sup_{B_r(o) - \{o\}} f \leq \sup_{\partial B_r(o)} f,$$

$$\inf_{B_r(o) - \{o\}} f \geq \inf_{\partial B_r(o)} f.$$

BEMERKUNG: Im vorstehenden Satz kennt man das Randverhalten von f bis auf einen möglichen Punkt aus $\partial\Omega$, $\Omega = B_r(0) - \{0\}$. Trotzdem gilt das bekannte Randmaximumprinzip. Allgemeiner kann man $f \in C^2(\Omega)$ diskutieren, wo endlich viele Ausnahmepunkte $p_1, \dots, p_m \in \partial\Omega$ zugelassen sind. Dann bekommt man im m.h. noch

$$\sup_{\Omega} f \leq \limsup_{\Omega \ni x \rightarrow \partial\Omega - \{p_1, \dots, p_m\}} f(x),$$

und eine entsprechende Ungleichung für das Infimum.

Die übliche Anwendung sieht so aus: Ω ist ein ebenes Gebiet, das aus einem anderen Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ durch Entfernen endlich vieler innerer Punkte $p_1, \dots, p_m \in D$ entsteht, also

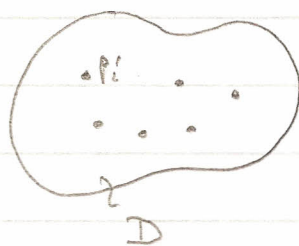
$$\Omega = D - \{p_1, \dots, p_m\}, \quad \partial\Omega = \partial D \cup \{p_1, \dots, p_m\}.$$

Ist f dann z.B. aus $C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega \cup \partial D)$, so folgt

$$\limsup_{\Omega \ni x \rightarrow \partial\Omega - \{p_1, \dots, p_m\}} f(x) = \sup_{\partial D} f,$$

mithin

$$\sup_{\Omega} f \leq \sup_{\partial D} f,$$



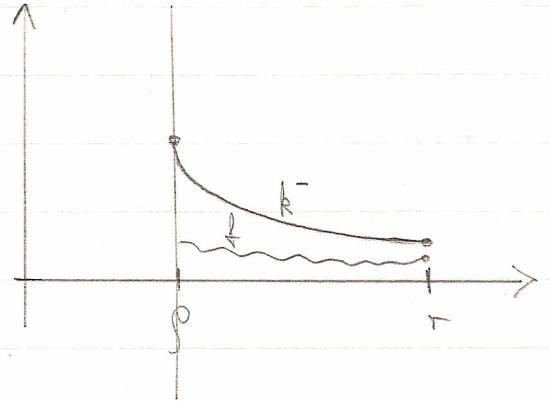
so daß f bei Annäherung an die singulären Stellen $p_1, \dots, p_m$ beschränkt bleibt. (Nach Bers sind die Singularitäten sogar hebbar.) "Singuläre Strecken" l sind verboten:
Entsteht Ω aus D durch Entfernen einer eindimensionalen Menge, so ist das o.g. Maximum-Prinzip i.a. verletzt.



Beweis von Satz 5.3: Für $0 < \rho < r$ sei

$$M(\rho) := \sup_{\partial B_\rho(o)} f.$$

Sei k_{ρ, a_ρ}^- so definiert, daß



$$k_{\rho, a_\rho}^-(x) = M(r) \quad \text{auf } \partial B_r$$

erfüllt ist. Mit $g_\rho := k_{\rho, a_\rho}^-$ haben wir

$$g_\rho(x) = -\rho \cdot \operatorname{ar} \cosh\left(\frac{|x|}{\rho}\right) + a_\rho,$$

also

$$g_\rho(x) = \rho \left[-\operatorname{ar} \cosh\left(\frac{|x|}{\rho}\right) + \operatorname{ar} \cosh\left(\frac{r}{\rho}\right) \right] + M(r),$$

$$|x| \geq \rho.$$

Aus $f \leq g_\rho$ auf ∂B_r bekommt man mit

Satz 5.2:

$$f(x) \leq g_\rho(x) \quad \text{auf } B_r - B_\rho.$$

Ist $x \in B_r - \{o\}$ beliebig, so gilt vorstehende Ungleichung insbesondere für alle $\rho < |x|$, unter Ausnutzung von

$$g_\rho(x) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} M(r)$$

bekommt man schließlich $f(x) \leq M(r)$. ■

SATZ 5.4 : (Bers)

Sei $f : B_r(0) - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf der punktierten Kreisscheibe $B_r(0) - \{0\}$. Dann läßt sich f glatt in den Ursprung hinein fortsetzen und löst die Minimalflächengleichung auf der ganzen Kreisscheibe $B_r(0)$.

Beweis: Wir benutzen hier einen Existenzsatz für das Dirichlet Problem auf Kreisscheiben bei C^2 -Randwerten für die nichtparametrische Minimalflächengleichung. Dazu sei f o.E. als C^2 -Funktion in der Nähe von ∂B_r vorausgesetzt, gegebenenfalls verkleinere man einfach den Radius. Aus Satz 5.3 folgt

$$\sup_{B_r(0) - \{0\}} |f| \leq \sup_{\partial B_r(0)} |f|,$$

also die Beschränktheit von f . Sei $\tilde{f} \in C^2(\overline{B_r}(0))$ nun die C^2 -Lösung der Minimalflächengleichung mit

$$\tilde{f}|_{\partial B_r} = f|_{\partial B_r}.$$

Dann gilt für $\varepsilon > 0$

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq r} (\nabla f - \nabla \tilde{f}) \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla \tilde{f}|^2}} \right) dx =$$

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq r} \operatorname{div} \left((f - \tilde{f}) \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla \tilde{f}|^2}} \right) \right) dx$$

$$- \int_{\varepsilon \leq |x| \leq r} (f - \tilde{f}) \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla \tilde{f}|^2}} \right) dx =$$

$$= \int_{\partial(B_r - B_\varepsilon)} (f - \tilde{f}) \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla \tilde{f}|^2}} \right) \cdot \overset{\text{Normale}}{\nu} \, ds,$$

wobei wir die Minimalflächengleichung und den Satz von Gauß ausgenutzt haben.

Das Integral über ∂B_r ist 0 gemäß $f = \tilde{f}$ dort. Auf ∂B_ε benutzt man die Beschränktheit des Integranden ($f, \tilde{f}$ sind ja beschränkt und $|\nabla f|/\sqrt{1+|\nabla f|^2} \leq 1$, etc.), es folgt:

$$0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq r} (\nabla f - \nabla \tilde{f}) \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla \tilde{f}|^2}} \right) dx$$

Wie wir uns früher aber schon überlegt haben, ist der Integrand stets ≥ 0 und " $= 0$ " nur wenn $\nabla f = \nabla \tilde{f}$ im betreffenden Punkt. Speziell gilt

$$\int_{\varepsilon \leq |x| \leq r} (\nabla f - \nabla \tilde{f}) \cdot \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla \tilde{f}}{\sqrt{1+|\nabla \tilde{f}|^2}} \right) dx = 0,$$

mithin

$$\nabla f = \nabla \tilde{f} \quad \text{auf } B_r - \{0\},$$

also $f - \tilde{f} = \text{const}$ dort. Da aber $f - \tilde{f}$ auf $\partial B_r(0)$ verschwindet, muß $\tilde{f} = f$ bis auf den Ursprung sein, so daß man f durch $f(0) := \tilde{f}(0)$ wie gewünscht glatt fortsetzen kann.



Für weitere Informationen über Hebbarkeitssätze vergleiche man die Bemerkungen auf Seite 98 in Osserman's Buch.

§ 6 Zur Lösung des Dirichlet Problems für die nichtparametrische Minimalflächengleichung

Literatur: 1) Nitsche, Kap. 7, § 635 ff
2) Massari & Miranda, Chapter III

Wir beschreiben den von Haar (1927, Math. Ann. 127) entwickelten Zugang zur Lösung von

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = 0 & \text{auf } \Omega \\ f|_{\partial\Omega} = \Phi \end{cases}$$

bei gegebenem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, und Randfunktion $\Phi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
Es sei ausdrücklich betont, daß die Raumdimension n jetzt beliebig ≥ 2 sein darf.

Wie früher bemerkt, gewinnt man Lösungen durch Minimieren des Flächenfunktional

$$A(f) = \int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla f|^2} \, dx$$

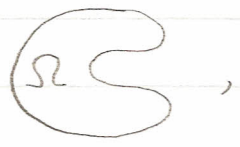
in geeigneten Klassen von Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f|_{\partial\Omega} = \Phi$, also mit Methoden der Variationsrechnung. Dabei steht man allerdings vor dem Problem, daß zum Beispiel C^k -Minimalfolgen, $k \geq 1$, a priori nicht konvergent sein müssen, d.h. man steht vor der Notwendigkeit, $A(f)$ auf Räumen "verallgemeinerte Funktionen" zu studieren und nachträglich Regularität der Extremale zu beweisen.

Der Haar'sche Zugang ist ein "Mittelweg", bei dem die "verallgemeinerten

Funktionen" immerhin noch Lipschitz sind. In den fünfziger Jahren gab De Giorgi einen viel größer gesteckten Rahmen, indem er das Problem in Räumen $BV(\Omega)$ studierte (das sind $L^1(\Omega)$ -Funktionen, deren 1te Distributionsableitungen durch Radon Maße erzeugt werden).

Bevor wir zu den Einzelheiten kommen, wollen wir kurz einige notwendige Bedingungen für die Existenz glatter Lösungen diskutieren (BV-Lösungen findet man immer, aber deren Graphen können senkrechte Stücke haben.)

① Konvexität des Definitionsbereichs Ω :

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nicht konvex, hat also die Form , so kann man nicht für jede Vorgabe von Randwerten die Existenz einer Lösung erwarten. Seifenfilmentwürfe zeigen, daß die "tatsächliche Minimalfläche" i. a. gar kein Graph über Ω ist.

② Lösungen, deren Gradient zum Rand hin unbeschränkt anwächst, muß man erwarten, wenn Ω zwar konvex, aber nicht streng konvex ist, d.h. wenn $\partial\Omega$ gerade Stücke enthält.

→ Beispiele findet man in Nitsche's Buch.

Man wird also strenge Konvexität von Ω fordern müssen: es gibt eine Kugel $\overline{B}_r$ (mit festem Radius r), die man von innen an jeden Randpunkt $\xi \in \partial\Omega$ legen kann und die $\partial\Omega$ genau nur in diesem Randpunkt berührt. Anschaulich heißt dies, daß $\partial\Omega$ überall gleich stark gekrümmt ist.

Der Händel Zugang vollzieht sich nun in mehreren Schritten, wir beginnen mit

I. Die Klasse $\text{Lip}(\Omega)$ und erste Eigenschaften des Funktionsraums A

Hier sei Ω zunächst nur ein beschränktes konvexes Gebiet in $\mathbb{R}^n$.

DEFINITION: a) $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lipschitz stetig auf Ω , falls es eine Konstante $M \geq 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|$$

für alle $x, y \in \Omega$. Die kleinste Zahl M mit dieser Eigenschaft heißt Lipschitz Konstante $\text{Lip}(f)$ von f .

b) Der Raum $\text{Lip}(\Omega)$ besteht aus allen beschränkten Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die gleichzeitig einer Lipschitz Bedingung genügen.

Für Lipschitz Funktionen gilt der berühmte

SATZ von Rademacher: Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz stetig, so existiert in Lebesgue fast jedem Punkt die Ableitung von f . Man hat in den Differenzierbarkeitsstellen x die Abschätzung

$$|\nabla f(x)| \leq \text{Lip}(f),$$

wobei $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \right)$ wie üblich den Vektor der partiellen Ableitungen bezeichnet. ■

Den Beweis findet man bei [Federer, Geometric Measure Theory] oder auch in der Monographie von [Simon, Lectures on Geometric Measure Theory].

Nach diesem Satz macht die Definition

$$A_{\Omega}(f) := \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx$$

auch für Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Sinn, die nur Lipschitz stetig auf dem Bereich Ω sind. Der Gradient existiert ja außerhalb einer Lebesgueschen Nullmenge, und diese spielt beim Integrieren keine Rolle. Es gilt

SATZ 6.1: i) A_{Ω} ist ein konvexes Funktional auf $\text{Lip}(\Omega)$.

ii) Ist $\mathcal{C} \subset \text{Lip}(\Omega)$ eine konvexe Teilmenge, die nicht zwei nur durch eine Konstante verschiedene Funktionen enthält, so ist A_{Ω} auf $\mathcal{C}$ sogar streng konvex. (Eine solche Klasse $\mathcal{C}$ kann z.B. $\{f \in \text{Lip}(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = \Phi, f \text{ stetig auf } \overline{\Omega}\}$ mit gegebener Randfunktion Φ sein.)

iii) A_{Ω} ist unterhalbstetig bzgl. gleichmäßiger Konvergenz bei beschränkter Lipschitz Konstanten, d.h.:

Gilt $f_m \rightarrow f$ gleichmäßig auf Ω und $\sup_m \text{Lip}(f_m) < \infty$,
so folgt

$$A_{\Omega}(f) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} A_{\Omega}(f_m).$$

Beweis: (i) Man hat für $f, g \in \text{Lip}(\Omega)$ und $0 \leq t \leq 1$

$$A_{\Omega}(t f + (1-t) \cdot g) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |t \cdot \nabla f + (1-t) \nabla g|^2} \, dx =$$

$$\int_{\Omega} \| t \cdot (1, \nabla f) + (1-t) (1, \nabla g) \| \, dx ,$$

wo $\|\cdot\|$ ausnahmsweise für die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^{n+1}$ steht.

Für beliebige Vektoren $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{n+1}$ gilt

$$\| t \cdot \xi + (1-t) \eta \| \leq t \|\xi\| + (1-t) \|\eta\|$$

mit „ $=$ “ genau nur für $t=0$ oder $t=1$ oder $\xi=\eta$.

Also ist

$$\begin{aligned} A_{\Omega}(t f + (1-t) g) &\leq t \int_{\Omega} \|(1, \nabla f)\| \, dx + (1-t) \int_{\Omega} \|(1, \nabla g)\| \, dx \\ &= t \cdot A_{\Omega}(f) + (1-t) A_{\Omega}(g) \end{aligned}$$

mit „ $=$ “ nur für $t=0$, $t=1$ oder $\nabla f = \nabla g$ f.ü.

Daraus liest man die Konvexität von A_{Ω} ab.

ii) Nehmen wir $0 < t < 1$ und $f, g \in \mathcal{C}$ an, so folgt aus

$$A_{\Omega}(t f + (1-t) g) = t \cdot A_{\Omega}(f) + (1-t) A_{\Omega}(g)$$

gemäß obiger Rechnung $\nabla f = \nabla g$ fast überall. Für Lipschitz Funktionen gilt nun aber wie im C^1 -Fall: $\nabla f = 0$ f.ü. impliziert $f = \text{const.}$ Mithin folgt aus der Wahl von $\mathcal{C}$: $f = g$

iii) Wir erinnern an folgende Aussagen:

Ist $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ eine auf Ω integrierbare Funktion, also

$g \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$, so ist

$$(1) \quad \int_{\Omega} \|g\| \, dx = \sup_{\substack{V \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}), \\ \|V\| \leq 1}} \int_{\Omega} g \cdot V \, dx,$$

wo „ $\cdot$ “ das übliche Skalarprodukt (mit Norm $\|\cdot\|$) bezeichnet.

Dies folgt aus der bekannten Dualraumdarstellung

$$L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})^* = L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}),$$

die sagt, daß die stetigen linearen Funktionale $L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}$ genau als Integrale mit $L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ -Funktionen geschrieben werden können.

Ist allgemein X ein Banachraum mit Dualraum X^* , so bekommt man als eine Konsequenz des Satzes von Hahn-Banach die Charakterisierung

$$\|\xi\| = \sup_{p \in X^*, \|p\| \leq 1} p(x),$$

und genau diese Eigenschaft führt mit der Wahl $X = L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ ($\Rightarrow X^* = L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$) auf die Identität (1).

Seien nun f, f_m wie in iii) vorausgesetzt. Mit $M := \sup_m \text{Lip}(f_m)$ gilt natürlich auch $\text{Lip}(f) \leq M$, wie

man aus der gleichmäßigen Konvergenz $f_m \rightarrow f$ unschwer erkennt.

Nach (1) wählen wir zu $\varepsilon > 0$ ein $V \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$, $\|V\| \leq 1$, mit

$$A(f) \leq \varepsilon + \int_{\Omega} V \cdot (1, \nabla f) \, dx.$$

Da Ω beschränkt ist, gilt

$$L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}) \hookrightarrow L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1}),$$

und bekanntlich liegt $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ dicht in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^{n+1})$ bzgl. der L^1 -Norm. Also finden wir eine glatte Funktion

$$\tilde{V}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

mit kompaktem Träger und

$$\int_{\Omega} \|V - \tilde{V}\| \, dx \leq \varepsilon.$$

Es folgt

$$A(f) \leq \varepsilon + \int_{\Omega} \tilde{V} \cdot (1, \nabla f) \, dx +$$

$$\int_{\Omega} (V - \tilde{V}) \cdot (1, \nabla f) \, dx \leq$$

$$\varepsilon + \varepsilon \cdot \sqrt{1+M^2} + \int_{\Omega} \tilde{V} \cdot (1, \nabla f) \, dx.$$

Für Lipschitz Funktionen gilt der Divergenzsatz

$$\int_{\Omega} (\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{n+1}) \cdot \nabla f \, dx = - \int_{\Omega} f \cdot \operatorname{div} (\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{n+1}) \, dx,$$

Randterme hat man keine, denn $\tilde{V}$ verschwindet ja bei $\partial\Omega$.

Also gilt gemäß $f_m \rightarrow f$ gleichmäßig:

$$\begin{aligned} A(f) &\leq \varepsilon \cdot (1 + \sqrt{1+M^2}) + \int_{\Omega} (\tilde{v}_1 - f \cdot \operatorname{div} (\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{n+1})) \, dx \\ &= \varepsilon \cdot (1 + \sqrt{1+M^2}) + \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\tilde{v}_1 - f_m \cdot \operatorname{div} (\tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_{n+1})) \, dx \\ &= \varepsilon \cdot (1 + \sqrt{1+M^2}) + \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tilde{V} \cdot (1, \nabla f_m) \, dx. \end{aligned}$$

Schlüßlich ist wie oben (denn $\int_{\Omega} \tilde{V} \cdot (1, \nabla f_m) \leq A(f_m)$)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{V} \cdot (1, \nabla f_m) \, dx &\leq \int_{\Omega} V \cdot (1, \nabla f_m) \, dx + \varepsilon \sqrt{1+M^2} \\ &\leq A(f_m) + \varepsilon \sqrt{1+M^2}, \end{aligned}$$

also

$$A(f) \leq \varepsilon (1 + 2 \sqrt{1+M^2}) + \liminf_{m \rightarrow \infty} A(f_m).$$

Da man hierbei $\varepsilon > 0$ noch beliebig wählen darf, folgt (iii). 

Eine allgemeinere Umhalbstetigkeitsaussage bzgl. uniform Lipschitz Konvergenz, für Funktionale der Form

$$F(f) = \int_{\Omega} \Phi(\nabla f) \, dx$$

mit beliebiger konvexer Funktion $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ findet man bei Massari & Miranda "Minimal surfaces of codimension 1", Chapter III.

II. Diskussion approximativer Probleme

Bei konvexem $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei $\varphi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Randfunktion, von der wir annehmen: φ hat eine Fortsetzung als Element von

$$\text{Lip}(\Omega) = \{ \text{alle Lipschitz stetigen Abb. } \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \}$$

(man beachte hier die kleine Abweichung von unserer früheren Def. dieses Raumes: die Lipschitz Stetigkeit soll bis zum Rand gehen, das spielt aber letztendlich keine Rolle, denn eine Lipschitz Abb. $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf beschränktem Ω läßt sich immer unter Erhaltung der Lipschitz Konstante auf $\overline{\Omega}$ ausdehnen).

Die Fortsetzung von φ werde wieder mit φ bezeichnet. Für

$$R \geq \text{Lip}(\varphi)$$

sei

$$\text{Lip}_R(\Omega, \varphi) := \{ f \in \text{Lip}(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}, \text{Lip}(f) \leq R \},$$

also die Menge aller Funktionen $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, die am Rand mit

γ übereinstimmen und deren Lipschitz Konstanten uniform durch R beschränkt sind. Dann gilt

SATZ 6.2: In $\text{Lip}_R(\Omega, \mathcal{Y})$ gibt es genau eine Minimalstelle des Flächenfunktionals A_Ω , d.h. man findet $f_R \in \text{Lip}_R(\Omega, \mathcal{Y})$ mit

$$A_\Omega(f_R) \leq A_\Omega(f) \quad \forall f \in \text{Lip}_R(\Omega, \mathcal{Y}).$$

Der Beweis benutzt die direkte Methode der Variationsrechnung:

Sei (f_m) eine Minimalfolge in $\text{Lip}_R(\Omega, \mathcal{Y})$, d.h. per Definition

$$A_\Omega(f_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \inf_{f \in \text{Lip}_R(\Omega, \mathcal{Y})} A_\Omega(f).$$

Es gilt $\text{Lip}(f_m) \leq R$ und deshalb mit fixiertem $x_0 \in \partial\Omega$

$$|f_m(x)| \leq |f_m(x_0)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| \leq$$

$$|\gamma(x_0)| + R \cdot |x - x_0| \leq |\gamma(x_0)| + R \cdot \text{diam}(\Omega),$$

also ist die Folge (f_m) gleichmäßig beschränkt. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli gibt es eine Teilfolge (wieder (f_m) genannt) und $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ mit

$$f_m \rightarrow f \text{ gleichmäßig auf } \overline{\Omega}.$$

Trivialerweise ist $f \in \text{Lip}_R(\Omega, \mathcal{Y})$, die Minimalität folgt aus Teil iii) des vorigen Satzes, denn

$$A_{\Omega}(f) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} A_{\Omega}(f_m) = \inf_{\text{Lip}_R(\Omega, \mathcal{F})} A_{\Omega}.$$

Die Eindeutigkeit der Minimalstelle schließt man aus ii) von Satz 6.1. ■

BEMERKUNG: Es ist keineswegs klar, ob die Funktion f_R tatsächlich Lösung unseres ursprünglichen Problems

$$A_{\Omega}(\cdot) \rightarrow \text{Min auf } \text{Lip}(\Omega) \cap \{f : f|_{\partial\Omega} = g\}$$

ist, denn die Minimalstelle (sofern sie existiert!) könnte ja durchaus Lipschitz Konstante $> R$ haben, und f_R minimiert nur in der eingeschränkten Klasse. Diesem Aspekt werden wir später wieder aufgreifen.

SATZ 6.3 : (Eigenschaften der Funktionen f_R)

i) Ist Ω' ein konvexes Teilgebiet von Ω , so ist $f_R|_{\Omega'}$

$$A_{\Omega'}\text{-minimal in } \text{Lip}_R(\Omega', f_R|_{\partial\Omega'}).$$

ii) Sei ψ eine Lipschitz Funktion mit $\text{Lip}(\psi) \leq R$ und

$\psi \leq \gamma$ auf $\partial\Omega$, g_R sei A_{Ω} -minimal in $\text{Lip}_R(\Omega, \psi)$. Dann ist $f_R \leq g_R$ auf $\overline{\Omega}$.

Streicht man die Voraussetzung " $\psi \leq \gamma$ " auf $\partial\Omega$, so ist

$$\sup_{\overline{\Omega}} |f_R - g_R| \leq \sup_{\partial\Omega} |\psi - \gamma|.$$

iii) Ist $f \in \text{Lip}_R(\Omega, \gamma) \cap C^2(\Omega)$ eine Lösung der nichtparametrischen Minimalflächengleichung auf Ω , so folgt $f = f_R$.

Beweis: i) Angenommen, es gibt eine Funktion $g \in \text{Lip}_R(\Omega', f_R|_{\partial\Omega'})$ mit

$$A_{\Omega'}(g) < A_{\Omega'}(f_R|_{\Omega'}).$$

Dann setzt man

$$\tilde{f} := \begin{cases} g & \text{auf } \Omega' \\ f_R & \text{auf } \Omega - \Omega' \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{f}$ stetig auf $\overline{\Omega}$ mit Randwerten γ . Zu zeigen ist

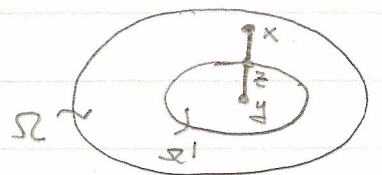
$$\text{Lip}(\tilde{f}) \leq R.$$

Dazu wählen wir $x, y \in \Omega$ und haben zu zeigen

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq R \cdot |x - y|,$$

was für $x, y \in \Omega'$ oder $x, y \in \overline{\Omega} - \overline{\Omega'}$ ist das klar, in der Diskussion bleibt der Fall

$$x \in \Omega - \Omega' \quad , \quad y \in \Omega'.$$



Dann verbindet man x und y durch eine Strecke, $z \in \partial\Omega'$ sei der Punkt, wo diese Strecke den Rand $\partial\Omega'$ trifft. Dann ist

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(z)| + |\tilde{f}(z) - \tilde{f}(y)| =$$

$$|f_R(x) - f_R(z)| + |g(z) - g(y)| \leq R \cdot (|x-z| + |x-y|) = R|x-y|.$$

Mithin ist $\tilde{f} \in \text{Lip}_R(\Omega, \mathcal{Y})$, also

$$A_\Omega\left(\frac{f}{R}\right) \leq A_\Omega(\tilde{f}),$$

was aber $A_{\Omega'}(f_R) \leq A_{\Omega'}(g)$ bedeutet, Widerspruch!

ii) Die Funktion $\min(f_R, g_R)$ gehört zu $\text{Lip}_R(\Omega, \mathcal{Y})$, also

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f_R|^2} \, dx = A_\Omega\left(\frac{f}{R}\right) \leq A_\Omega(\min(f_R, g_R)) =$$

$$\int_{[f_R \leq g_R]} \sqrt{1 + |\nabla f_R|^2} \, dx + \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla g_R|^2} \, dx \implies$$

$$\int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla f_R|^2} \, dx \leq \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla g_R|^2} \, dx \quad (a)$$

Hierbei haben wir benutzt

$$\nabla \max(\eta, \rho) = \begin{cases} \nabla \eta & \text{f.ü. auf } [\eta \geq \rho] \\ \nabla \rho & \text{f.ü. auf } [\eta \leq \rho] \end{cases}$$

und entsprechend für $\min(\eta, \rho)$, wenn η, ρ beliebige Lipschitz Funktionen sind.

Analog gehört $\max(f_R, g_R)$ zu $\text{Lip}_R(\Omega, \mathcal{Y})$, es folgt

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla g_R|^2} \, dx \leq A_{\Omega}(\max(f_R, g_R)) =$$

$$\int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla f_R|^2} \, dx + \int_{[f_R \leq g_R]} \sqrt{1 + |\nabla g_R|^2} \, dx \implies$$

$$\int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla g_R|^2} \, dx \leq \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla f_R|^2} \, dx \quad (b)$$

Aus (a), (b) folgt

$$\int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla g_R|^2} \, dx = \int_{[f_R > g_R]} \sqrt{1 + |\nabla f_R|^2} \, dx,$$

also

$$A_{\Omega}(f_R) = A_{\Omega}(\min(f_R, g_R)),$$

d.h. wegen der Eindeutigkeit der Minimalstelle f_R in $\text{Lip}_R(\Omega, \varphi)$ gilt

$$f_R = \min(f_R, g_R),$$

mithin $f_R \leq g_R$.

Nun wird die Voraussetzung $\varphi \leq \psi$ auf $\partial\Omega$ entfernt. Sei

$$M := \sup_{\partial\Omega} |\varphi - \psi|.$$

Offenbar ist $g_R + M$ A_Ω -minimal in $Lip_R(\Omega, \Psi + M)$.

Gemäß $\Psi + M \geq \Psi$ auf $\partial\Omega$ folgt aus dem Bisherigen

$$f_R \leq g_R + M \implies$$

$$f_R - g_R \leq \sup_{\partial\Omega} |\Psi - \Psi|.$$

Analog beweist man $f_R - g_R \geq -M$.

iii) Sei $g \in Lip_R(\Omega, \Psi)$, Dann ist nach Gauß

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} A_\Omega(f + t(g-f)) = \int_\Omega \frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \cdot \nabla(g-f) dx =$$

$$\int_\Omega -\operatorname{div} \frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \cdot (g-f) dx = 0,$$

d.h. die konvexe Funktion $t \mapsto A_\Omega(f + t(g-f))$ hat einen kritischen Punkt bei $t=0$. Dann liegt in $t=0$ eine Minimalstelle vor, also

$$A_\Omega(f) \leq A_\Omega(g),$$

mithin $f = f_R$ wegen der Eindeutigkeit des Minimums f_R .



Wie bereits gesagt sind die Funktionen f_R keine Flächen kleinsten Inhalts zu fixierten Randwerten Ψ , denn der Gradient der Minimalfläche könnte ja größer als R ausfallen. Wenn man aber geometrische Be-

dingungen an Ω und die Randwerte φ finden kann, die a priori eine Lipschitz Bedingung $\text{Lip}(\varphi) \leq K$ für die Fläche kleinsten Inhalts erwarten lassen, so wird man hoffen dürfen, daß f_R mit $R > K$ tatsächlich kleinsten Inhalt unter allen Lipschitz - Flächen mit Randwerten φ hat. Solche Bedingungen an Ω und φ werden wir jetzt beschreiben.

III. Die "bounded slope condition" für Ω, φ

Wie bisher sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes konvexes Gebiet und $\varphi: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Randfunktion. Dann interessiert uns die zugehörige

$$\text{Randmannigfaltigkeit} \quad \Gamma := \{ (z, \varphi(z)) : z \in \partial\Omega \},$$

also einfach der Graph von φ .

DEFINITION: Die Randmannigfaltigkeit Γ erfüllt eine bounded slope condition (= beschränkte Steigung) mit Konstante $K \geq 0$, wenn folgendes gilt:

Zu jedem Punkt $p = (x_0, \varphi(x_0)) \in \Gamma$ gibt es affin lineare Funktionen

$$L_p^\pm : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$L_p^\pm(x) = a^\pm \cdot (x - x_0) + \varphi(x_0), \quad a^\pm \in \mathbb{R}^n,$$

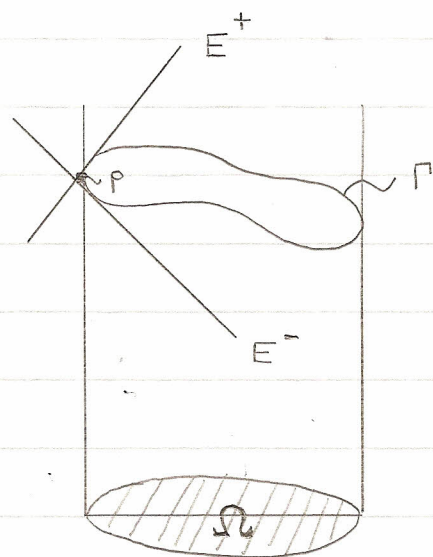
von p abhängig mit

$$(i) \quad L_p^-(x) \leq \varphi(x) \leq L_p^+(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

$$(ii) \quad |a^\pm| \leq K.$$

Was sagt die B. S. C. anschaulich?

Fixiert man einen beliebigen Punkt $p \in \Gamma$, $p = (x_0, y(x_0))$, so findet man dazu zwei nicht vertikale Hyperebenen E^+ , E^- (also Graphen über $\mathbb{R}^n$!), deren Steigung einerseits durch die vorgegebene Konstante K beschränkt ist, den Punkt p enthalten und andererseits die Randmannigfaltigkeit Γ in das keilförmige Gebiet $\mathcal{G}$ einschließen, das aus dem Durchschnitt all der Punkte in $\mathbb{R}^{n+1}$ besteht, die gleichzeitig unterhalb der Ebene E^+ und oberhalb der Ebene E^- liegen.



BEMERKUNGEN: (vgl. Gilbarg & Trudinger, 2nd ed, p. 309 ff)

① Hartman [Pacific J. Math. 18 (1966)] zeigt folgende Aussage:

Sind $\mathcal{G}$ und $\partial\Omega$ von der Klasse C^2 , und ist Ω uniform konvex, d.h. läßt sich vor einem eine Kugel mit festem Radius an jedem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ legen, die $\partial\Omega$ genau nur in x_0 berührt, so erfüllt Γ die B. S. C. mit einer Konstanten K , die durch die Krümmungen von $\partial\Omega$ und durch Schranken auf die 1^{ten} und 2^{ten} Ableitungen von $\mathcal{G}$ bestimmt wird.

Andere Formuliert: Ist Ω ein vernünftiges konvexes Gebiet, also z.B. eine Kugel in $\mathbb{R}^n$ (Kreisscheibe im 2-dim. Fall), und ist die Randfunktion f regulär, so kann aus diesen Daten stets eine Konstante $K \geq 0$ ausrechnen, für die die B.S.C. erfüllt ist.

② Uns interessieren in dieser Vorlesung die "klassischen Minimalflächen" im $\mathbb{R}^3$, also der Fall, wo das Parametergebiet Ω in der Ebene liegt. Meier formulierte in seiner Arbeit [Math. Ann. 97 (1927)] die

3-Punkte Bedingung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und konvex. Die Randmännigfaltigkeit Γ erfüllt die 3-Punkte Bedingung mit Konstante K , wenn man durch drei beliebig vorgegebene verschiedene Punkte aus Γ eine Ebene E legen kann, deren Steigung durch K beschränkt ist.

Es gilt (vgl. Gilbarg & Trudinger, 2nd ed, p. 314):

Im Fall $n=2$ sind die B.S.C. und die 3-Punkte Bedingung zueinander äquivalent, die Konstanten sind jeweils gleich.

Wir kommen jetzt zur Diskussion des Variationsproblems

$$A_{\Omega}(\cdot) \rightarrow \min$$

bei vorgegebener Randfunktion $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in geeigneten

Klassen von Lipschitz Funktionen $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$. Dabei nehmen wir an:

i) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und konvex

ii) $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz stetig, also

$$|f(x) - f(z)| \leq c \cdot |x - z|$$

für alle $x, z \in \partial\Omega$ mit einer Konstanten $c > 0$.

iii) Die Randmannigfaltigkeit genügt der B.S.C. mit Konstante K .

Dabei können wir o.E. annehmen, daß

$$K = c$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Aus B.S.C. mit} \\ \text{Konstante } K \text{ folgt sofort} \\ |f(x) - f(y)| \leq K |x - y| \\ \text{für } x, y \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

gilt, sonst setzt man beide Konstanten durch $\max(K, c)$. Außerdem bedeutet es keinerlei Einschränkung, f als Lipschitz mit Konstante K auf $\overline{\Omega}$ vorauszusetzen, denn es gilt der

Satz v. Kirszbraun : ([Federn], p.201)

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ beliebig und $f: M \rightarrow \mathbb{R}^l$ Lipschitz, so gibt es eine Lipschitz Abbildung $\overline{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ mit $\overline{f}|_M = f$ und $\text{Lip}(\overline{f}) = \text{Lip}(f)$.

Das heißt: Man kann jede Lipschitz Abbildung unter Erhaltung der Lipschitz Konstanten auf den ganzen Raum fortsetzen. Für $l=1$ ist das eine Übungsaufgabe, in höherdimensionalen Bildräumen argumentiert man mit dem Lemma von Zorn.

Wir wählen jetzt R beliebig $> K$ und betrachten das Funktional

$$A_{\Omega}(f) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx$$

auf der Klasse $\text{Lip}_R(\Omega, \mathcal{P})$, f_R sei die nach Satz 6.2 existierende eindeutige Minimalstelle von A_{Ω} in $\text{Lip}_R(\Omega, \mathcal{P})$, und wir zeigen:

$$* \quad \text{Lip}(f_R) \leq K,$$

d.h. die Lipschitz Konstante von f_R wird durch K beschränkt und ist somit echt kleiner als R .

Zum Beweis von $*$ wählt man $x_0 \in \partial\Omega$ und dazu affin lineare Funktionen $L^{\pm} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$L^- \leq \mathcal{P} \leq L^+ \text{ auf } \partial\Omega, \quad L^-(x_0) = \mathcal{P}(x_0) = L^+(x_0), \\ \text{Lip}(L^{\pm}) \leq K.$$

Die Funktionen $L^{\pm}$ gehören zu $\text{Lip}_R(\Omega, L^{\pm}|_{\partial\Omega})$, lösen auf Ω natürlich die Minimalflächengleichung, mithin folgt aus Teil iii) von Satz 6.3, daß $L^{\pm}$ die eindeutigen A_{Ω} -Minimalstellen in $\text{Lip}_R(\Omega, L^{\pm}|_{\partial\Omega})$ sind. Also können wir das Vergleichsprinzip Satz 6.3 ii) anwenden, woraus folgt:

$$L^- \leq f_R \leq L^+ \text{ auf } \overline{\Omega}.$$

Für $x \in \overline{\Omega}$ bedeutet dies:

$$f_R(x) - f_R(x_0) \leq L^+(x) - f_R(x_0) = L^+(x) - \mathcal{P}(x_0) =$$

$$= L^+(x) - L^+(x_0) \leq K \cdot |x - x_0|$$

und entsprechend $f_R(x) - f_R(x_0) \geq -K \cdot |x - x_0|$, so daß

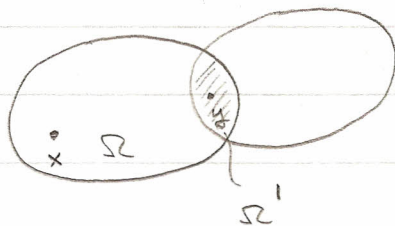
wir zunächst bekommen:

$$** \left\{ \begin{array}{l} |f_R(x) - f_R(y)| \leq K \cdot |x - y|, \\ x \in \overline{\Omega}, \quad y \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Seien x, y nun beliebige Punkte aus Ω . Man setzt $v := y - x$ und betrachtet das Gebiet

$$\Omega' := \Omega \cap (v + \Omega),$$

wo $v + \Omega$ die um v verschobene Menge repräsentiert.



Man setzt $f_{1,2}: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_1(z) := f_R(z), \quad f_2(z) := f_R(z-v),$$

und sieht: f_i ist $A_{\Omega'}$ -minimal in $\text{Lip}_R(\Omega', f_i|_{\partial\Omega'})$,

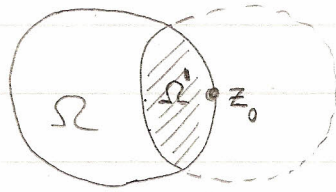
das Vergleichsprinzip Satz 6.2 ii) liefert die Abschätzung

$$\sup_{\Omega'} |f_1(z) - f_2(z)| \leq \sup_{\partial\Omega'} |f_1(z) - f_2(z)|, \text{ also}$$

$$\sup_{z \in \Omega'} |f_R(z) - f_R(z-v)| \leq \sup_{z \in \partial\Omega'} |f_R(z) - f_R(z-v)|.$$

Das Supremum rechts wird realisiert in einem Punkt $z_0 \in \partial\Omega'$.

Fall 1: $z_0 \in \partial\Omega \cap \partial\Omega'$



Dann ist

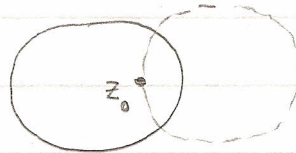
$$|f_R(y) - f_R(x)| = |f_R(y) - f_R(y-v)| \leq$$

$$\sup_{z \in \Omega'} |f_R(z) - f_R(z-v)| \leq |f_R(z_0) - f_R(z_0-v)|$$

Der Punkt $z_0 - v$ liegt in $\overline{\Omega}$, z_0 gehört zum Rand von Ω , also gilt nach **

$$|f_R(z_0) - f_R(z_0-v)| \leq K \cdot |v| = K \cdot |x-y|.$$

Fall 2: $z_0 \in \Omega \cap \partial\Omega'$



Dann gehört $z_0 - v$ zu $\partial\Omega$ und man kann wieder ** benutzen.

Insgesamt ist damit bewiesen:

SATZ 6.4: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und konvex. $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei Lipschitz stetig, und die B.S.C. sei mit $K \geq 0$ erfüllt. Dann gilt für $R > K$:

$$\text{Lip}(\downarrow_R) \leq K,$$

wobei $\downarrow_R$ die früher die eindeutige Minimalstelle von A_Ω in $\text{Lip}_R(\Omega, g)$ bezeichnet. Die Lipschitz Konstante von $\downarrow_R$ ist also echt kleiner als die vorgegebene Schranke R .

Bemerkungen: 1) Satz 6.4 beinhaltet eine sogenannte apriori Abschätzung für den Gradienten, die durch die B.S.C. erzwungen wird.

2) Aus der Lipschitz Stetigkeit von $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zusammen mit der Gültigkeit der B.S.C. mit Konstante K folgt natürlich

$$\text{Lip}(g) \leq K,$$

denn sind $L^\pm$ entsprechende Funktionen zum Randpunkt $x \in \partial\Omega$, so gilt

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) &= L^-(x) - g(y) \leq L^-(x) - L^-(y) \\ &\leq K \cdot |x - y| \end{aligned}$$

und entsprechend

$$g(x) - g(y) \geq L^+(x) - L^+(y) \geq -K |x - y|.$$

Nach diesen Vorbereitungen sind wir jetzt in der Lage, einen Existenzsatz für das Minimalflächenproblem zu formulieren:

SATZ 6.5: Sei Ω beschränkt und konvex sowie $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz stetig. Erfüllen Ω und f eine B.S.C., so gibt es genau eine Funktion $f \in \text{Lip}(\Omega, f) := \{g: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ Lipschitz mit } g|_{\partial\Omega} = f\}$, so daß

$$A_{\Omega}(f) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx \leq A_{\Omega}(g)$$

für alle $g \in \text{Lip}(\Omega, f)$ gilt.

Beweis: Man wählt $R > K$ (Konstante aus der B.S.C.) und betrachtet die A_{Ω} -Minimalstelle f_R in $\text{Lip}_R(\Omega, f)$. Nach Satz 6.4 gilt

$$\text{Lip}(f_R) < R,$$

so daß für jede beliebige Funktion $g \in \text{Lip}(\Omega, f)$ vorausgesetzt $|\varepsilon| \ll 1$. Es folgt

$$A_{\Omega}(f_R) \leq A_{\Omega}(f_R + \varepsilon(g - f_R)) \implies (f := f_R)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla(f_R + \varepsilon(g - f_R))|^2} \, dx = 0 \iff$$

$$(1) \quad \int_{\Omega} (1 + |\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \cdot \nabla(g - f) \, dx = 0.$$

Mit $F(p) := \sqrt{1 + |p|^2}$ ist für zwei verschiedene Punkte $p, q \in \mathbb{R}^n$

$$F(q) - F(p) = \nabla F(p) \cdot (q-p) + D^2 F(q^*) (q-p, q-p),$$

wo q^* eine geeignete Zwischenstelle bezeichnet. Nun ist F konvex, also

$$D^2 F(q^*) (q-p, q-p) \geq 0,$$

und mit $q := \nabla g$, $p := \nabla f$ folgt

$$\int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla g|^2} \, dx - \int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla f|^2} \, dx \geq$$

$$\int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla (g-f) (1+|\nabla f|^2)^{-1/2} \, dx,$$

und die rechte Seite ist gemäß (1) identisch 0, also

$$\int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla g|^2} \, dx \geq \int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla f|^2} \, dx,$$

und das war zu zeigen. ■

Lassen wir also Lipschitz Graphen als Minimalflächen zu, so finden wir in dieser erweiterten Klasse eine Fläche kleinsten Inhalts. Es stellt sich nun natürlich die Frage, ob man an solchen Lösungen überhaupt interessiert ist, denn Lipschitz Graphen können ja durchaus Knickstellen haben, so daß gar keine Mannigfaltigkeit im Sinne unserer früheren Definition vorliegen muß. Es ist zum Beispiel unmöglich, die mittlere Krümmung für Lipschitz Graphen zu erklären. Somit besteht eine Lücke zwischen unseren Betrachtungen aus § 5, wo wir C^2 -Lösungen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

der nichtparametrischen Minimalflächengleichung

$$(2) \quad \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \right) = 0$$

diskutiert haben, und der vorstehenden Diskussion der Existenzfrage, die man leider nur in Klassen von nicht glatten Funktionen führen kann: der naheliegende Gedanke

$$\int_{\Omega} \sqrt{1+|\nabla f|^2} \, dx \rightsquigarrow \operatorname{Min}$$

auf $\mathcal{C} := \{ f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) : f|_{\partial\Omega} = \varphi \}$ zu studieren und damit

direkt glatte Lösungen von (2) zu produzieren, führt nicht zum Ziel. Ist $\{f_m\}$ Minimalfolge in $\mathcal{C}$, so möchte man eine Teilfolge wählen, die gegen eine C^2 -Funktion $f \in \mathcal{C}$ konvergiert. Dazu ist aber erforderlich, solche Schranken auf $\{f_m\}$ zu finden, die Kompaktheit in der C^2 -Topologie garantieren. (Zum Beispiel könnten C^3 -Normen von f_m uniform beschränkt sein, was die Anwendbarkeit von Arzela Ascoli bedeuten würde.) Leider hat man zu wenig Information über die Minimalfolge, mit der direkten Methode der Variationsrechnung lassen sich keine glatten Lösungen produzieren.

Andererseits hegt man durchaus die Hoffnung, daß unsere Lipschitz Minimalstelle $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vielleicht besser regulär ist als es zunächst dem Anschein hat. Dies führt uns in die sogenannte Regulärkeitstheorie. Tatsächlich gilt der sehr tiefe

SATZ 6.6: (Regulärkeitssatz von De Giorgi)

Die im Satz 6.5 erzeugte Lipschitz Minimalstelle ist auf Ω reell analytisch.

Dieser Satz hat eine lange Geschichte, die mit der Untersuchung des zweidimensionalen Spezialfalls $n=2$ durch Haar und Rado um 1930 beginnt. Wir wissen bereits:

Für $n=2$ sind C^2 -Lösungen der nichtparametrischen Minimalflächengleichung reell analytisch.

Mithin bleibt zu zeigen, daß die Lipschitz Minimalstelle zweimal stetig differenzierbar ist, und genau das wurde von Haar und Rado mit einem relativ einfachen Argument bewiesen. Eine Beweisskizze findet man bei [Nitsche, §639, 640] und im Buch von Rado. Diese Argumente sind allerdings streng zweidimensionaler Natur und haben keine Verallgemeinerung für Dimensionen $n \geq 3$.

In höheren Dimensionen $n \geq 3$ ist die Situation folgendermaßen: Die allgemeine Theorie der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen liefert

Ist f von der Klasse $C^{1,\alpha}$ (die 1^{ten} Ableitungen sind Hölder stetig mit einem Exponenten $0 < \alpha < 1$), so folgt Analytizität von f .

Dies wurde von Morrey in den vierziger Jahren bewiesen. Übrig bleibt der Sprung von Lipschitz auf $C^{1,\alpha}$, und darin besteht die Leistung von E. De Giorgi (aus Pisa), dem dies 1957 gelang. Leider ist diese Arbeit in einer heute nicht mehr existierenden italienischen Zeitschrift publiziert, vielleicht werde ich den Beweis im nächsten Semester vortragen.

Einen völlig anderen Zugang zum Existenz- und Regularitätsproblem bei der nichtparametrischen Minimalflächengleichung findet man bei Gilbarg & Trudinger, die zunächst apriori Abschätzungen für glatte Lösungen beweisen und dann funktionalanalytische Argumente ins Spiel bringen.