**Arbeitsgruppe “Angewandte Analysis”**

Prof. Dr. M. Fuchs

P.D. Dr. M. Bildhauer

Dr. D. Apushkinskaya

Dr. A. Elfanni

## Was verstehen wir unter “Angewandte Analysis”?

1. Theorie partieller Differentialgleichungen;

2. Variationsrechnung;

3. Interaktion zwischen 1. und 2.;

4. Modellierung von Problemen aus Fluid- und Kontinuumsmechanik ($\rightarrow$ Physik, Ingenieurwissenschaften, Materialtheorie) mit 1. und 2.;

5. Fragestellungen aus der Differentialgeometrie.

**Prinzip: "Interaktion" Theorie-Praxis.**

| | | |
|---|---|---|
| **Theorie der PDG**<br>**Variationsrechnung** | $\leftrightarrow$ | **Naturwissenschaften** |

Die Gleichungen aus der Praxis sind Grenzfälle bekannter Theorien. Ihre Diskussion gibt einerseits Auskunft über ein praktisches Problem, andererseits hat man den Einstieg in eine neue mathematische Theorie.

**Weitere Komponente: Praktische Lösung (Berechnung)**

$\rightsquigarrow$ Angewandte Mathematik

Dazu muss man aber erst wissen, ob es überhaupt Lösungen gibt!

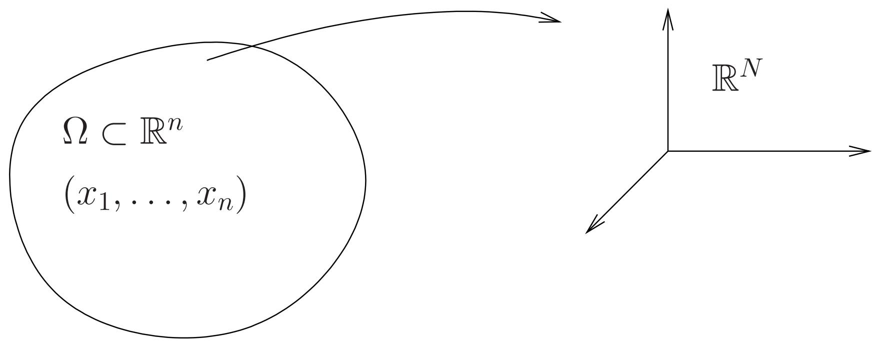
**Unsere Aufgabe:**

**Existenz- Eindeutigkeits- und Regularitätssätze**

## Was versteht man unter einer PDG?

PDG = Gleichung für eine gesuchte Funktion $u$,

$u :$




die partielle Ableitungen von $u$ involviert.

**Konkrete Beispiele.**

1. Potential $u$ zu einer gegebenen Ladungsverteilung $f$

$$\Delta u \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \;=\; f \quad \text{auf } \Omega$$
$$u_{|\partial\Omega} \;=\; u_0 \quad \text{(vorgegeben)}\,.$$

2. Wärmeleitungsgleichung: $u = u(t, x_1, \ldots, x_n)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_{(x)} u \;=\; f$$

   plus Anfangs- und Randbedingungen.

   Einstiegsvorlesung: PDG I (4+2); Klassifikation, lineare PDG, Lösungsmethoden

3. Prototyp einer nichtlinearen PDG:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) \;=\; H \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Graph}(u) \text{ hat mittlere Krümmung } H.$$

**Was ist ein Variationsproblem?** Eine unendlichdimensionale Extremwertaufgabe!

Beispiel: $$F(u) \;:=\; \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{dx}\,, \qquad \mathrm{u} : \Omega \to \mathbb{R}\,.$$

"Finde $v$: $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(v) \;\leq\; F(u)$$

für alle $u$: $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $u_{|\partial\Omega}$ fixiert." Fragen:

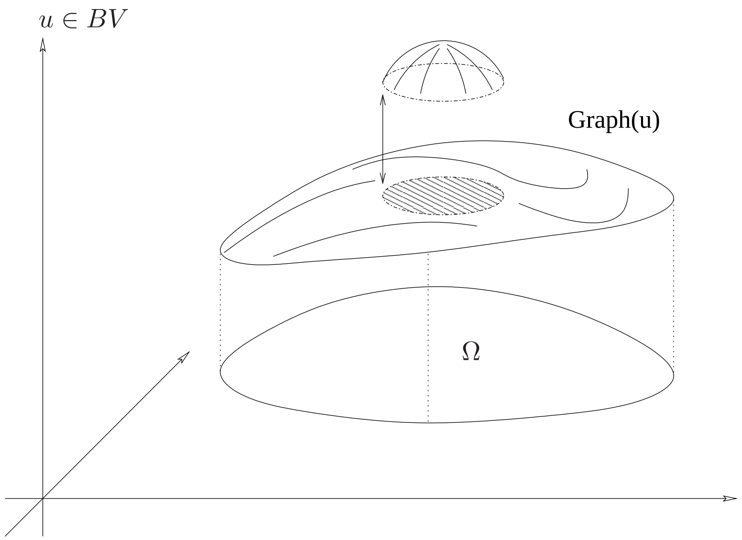
1. Existenz?
2. Eindeutigkeit?

Brückenschlag zu PDG: In einer Minimalstelle $v$ gilt

$$\text{“}F'(v) \;=\; 0\text{”} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta v \;=\; 0\,.$$

**Minima erfüllen eine spezielle PDG,**
**die sogenannte Eulergleichung.**

Beispiel: $F(u) \;=\; \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\,\mathrm{dx} \;=\;$ “Flächeninhalt” von Graph(u) .




Eulergleichung ist in diesem Fall die sogenannte Minimalflächengleichung

$$\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) \equiv 0\,.$$

Vorlesung: PDG II/Variationsrechnung (4+2);

1. nichtlineare PDG,
2. Existenzsätze für Variationsprobleme in passenden Funktionenräumen,
3. Regularitätstheorie.

**Einige Probleme aus der Praxis (Fluidmechanik):**

## 1.) Die Navier-Stokes-Gleichungen der Strömungsmechanik.

Evolutionsgleichungen einer Flüssigkeit oder eines Gases in n Raumdimensionen (hier stets $n = 2, 3$):

- Massenerhaltung;
- Impulserhaltung bzw. Newtonsches Kraftgesetz (Aktionsprinzip).

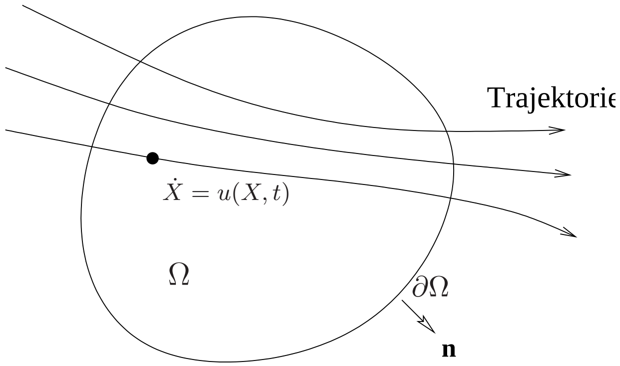
Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^n &: \ \text{räumliche Variable;} \\ t \in [0, \infty) &: \ \text{Zeit;} \\ u = u(x,t) = (u^1, \dots, u^n) &: \ \text{Geschwindigkeitsfeld;} \\ \rho = \rho(x,t) &: \ \text{Massendichte.} \end{aligned}$$

a) Massenerhaltung. Betrachte ein “Testvolumen” $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\text{Massenänderung in } \Omega = \text{Massenfluß durch } \partial\Omega, \text{ d.h.}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{dx} \;=\; -\int_{\partial\Omega} \rho(x,t)\,u(x,t)\cdot n\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{\mathrm{n-1}} \;=\; -\int_\Omega \mathrm{div}\,(\rho(\mathrm{x},\mathrm{t})\,\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t}))\,\mathrm{dx}\,.$$




$$\Omega \text{ beliebig} \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho(x,t)\,u(x,t)) \;=\; 0\,.$$

b) Newtonsches Kraftgesetz.

Impulsänderung in $\Omega$ = Impulsfluß durch $\partial\Omega$ + Kräfte.

Kräfte: Volumenkräfte (Gravitation, Corioliskraft, elektromagnetische Kräfte etc.);
Oberflächenkräfte (Wechselwirkungen am Rande,
insbesondere Kompressions- und Viskositätskräfte).

$$\int_\Omega \frac{\partial(\rho u)}{\partial t}\,\mathrm{dx} \;=\; -\int_{\partial\Omega} \rho\,\mathrm{u}\,(\mathrm{u}\cdot\mathrm{n})\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{\mathrm{n}-1} + \int_\Omega \rho\,\mathrm{f}\,\mathrm{dx} + \int_{\partial\Omega} \sigma\cdot\mathrm{n}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{\mathrm{n}-1}\,,$$

$f$: Volumenkräfte;
$\sigma = -p\mathbf{1} + \tau$: Spannungstensor;
$p$: skalarer Druck;
$\tau$: viskoser Spannungstensor ($\rightsquigarrow$ Flüssigkeitstyp).

Konstitutive Gleichung für den viskosen Spannungstensor.

**Postulat:** (Newtonsche Flüssigkeiten)

- Die Flüssigkeit ist isotrop.
- $\tau$ ist eine lineare Funktion von $Du$.
- $\tau$ ist rotations- und translationsinvariant.

Es folgt

$$\tau = \lambda \operatorname{div} u \, \mathbf{1} + 2\nu \, D^{sym} u \,,$$

mit:

- $D^{sym}u = \frac{1}{2}(Du + {}^t Du)$ (symmetrischer Gradient);
- $\lambda$, $\nu$: Lamé Viskositätskoeffizienten (im Folgenden konstant).

Ist die Massendichte $\rho \equiv 1$ (Inkompressibilität) so folgt $\operatorname{div} u = 0$ (Massenerhaltung).

Die klassischen Navier-Stokes Gleichungen (C.L. Navier, 1822; G.G. Stokes, 1845) lauten im homogenen inkompressiblen Fall mit Unbekannten $u$, $p$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu\,\Delta u + \nabla p &= f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T)\,, \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T)\,. \end{aligned} \tag{N.St.}$$

Betrachtet wird etwa das Anfangswertproblem (Cauchy Problem) mit

$$u_{|t=0} = u^0(x)\,.$$

Millennium Prize Problem, 24.05.2000. (Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts (CMI)) C.L. Fefferman: "…we ask for a proof of one of the following four statements.

(A) Existence and smoothness of Navier-Stokes solutions on $\mathbb{R}^3$. Take $\nu > 0$ and $n = 3$. Let $u^0(x)$ be any smooth, divergence-free vector field satisfying (4) (Anm.: Wachstumsbedingung für $|x| \to \infty$). Take $f(x,t)$ to be identically zero. Then there exist smooth functions $p(x,t)$, $u_i(x,t)$ on $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$ that satisfy (1), (2), (3), (6), (7). (Anm.: Cauchy Problem für (N.St.), $p$, $u$ glatt mit endlicher Energie)

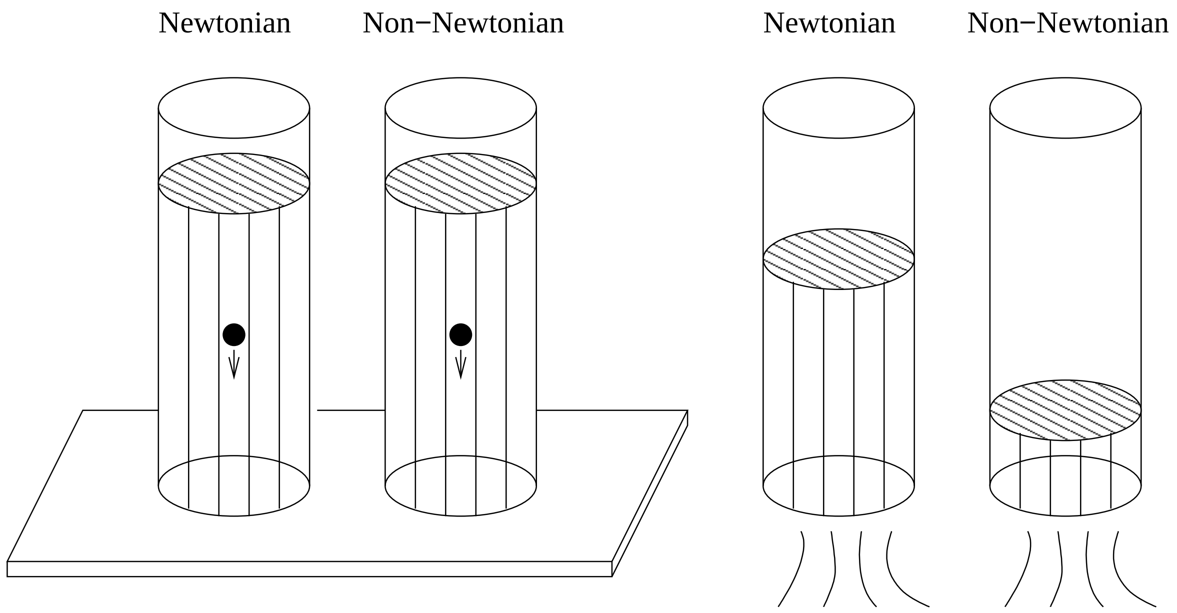
(B) …

(C) Breakdown of Navier-Stokes solutions on $\mathbb{R}^3$. Take $\nu > 0$ and $n = 3$. Then there exist a smooth, divergence-free vector field $u^0(x)$ on $\mathbb{R}^3$, and a smooth $f(x,t)$ on $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, satisfying (4), (5) (Anm.: Wachstumsbedingung für $f$), for which there exist no solutions $(p,u)$ of (1), (2), (3), (6), (7) on $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$.

(D) …"

**2.) Hochpolymere Fluide.** (siehe Bird, Armstrong, Hassager: *Dynamics of polymeric liquids*, Wiley)

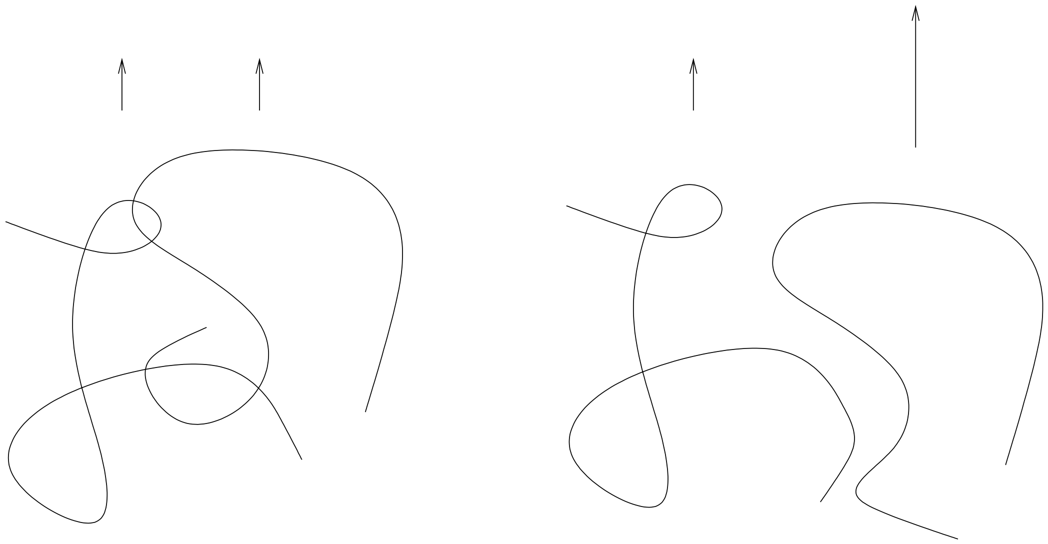
Experiment.



**Idee.** Bei generalisierten Newtonschen Fluiden hängt die Viskosität von der "Scherungs-Rate" ab, d.h.

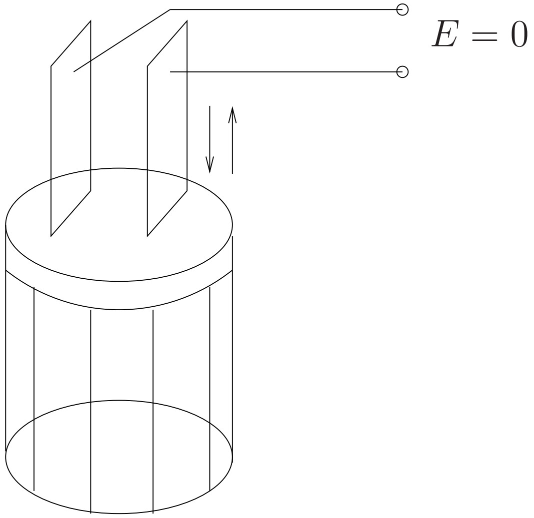
$$\nu = konst \ \ \text{(Newtonsch)}, \quad \nu = \nu(|D^{sym}(v)|) \ \ \text{(nicht-Newtonsch)}.$$

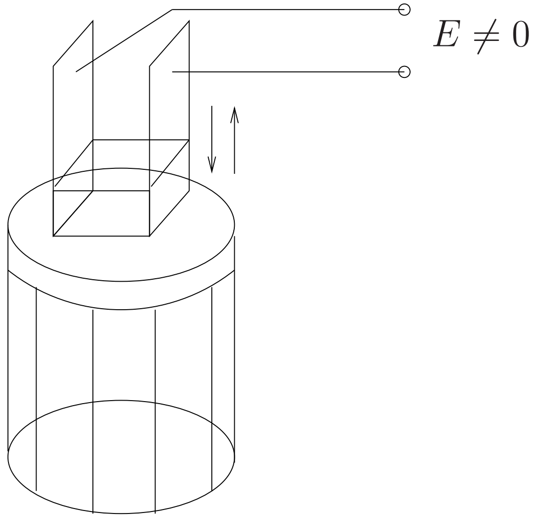
Meist: shear thinning, d.h. $\nu$ fällt, falls $|D^{sym}(v)|$ wächst.



Selten: shear thickening (hoch konzentrierte Suspensionen sehr kleiner Partikel).

## 3.) Elektrorheologische Fluide.




www-m2.mathematik.tu-muenchen.de/∼rettig/film.en.html . . .

Monographien:


1. M. Bildhauer, *Convex variational problems: linear, nearly linear and anisotropic growth conditions.* Lecture Notes in Mathematics 1818, Springer, Berlin-Heidelberg 2003.

2. M. Fuchs, *Topics in the Calculus of Variations.* Vieweg, Wiesbaden 1994.

3. M. Fuchs, G. Seregin, *Variational methods for problems from plasticity theory and for generalized Newtonian fluids.* Lecture Notes in Mathematics 1749, Berlin-Heidelberg 2000.