Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. Alice Keller

Erinnerung: Die Klausur findet am 21. Februar 05 von 10 (st) bis 12 Uhr im Hörsaal 3 statt.
Elektronische Hilfsmittel jeder Art sind nicht erlaubt. Die Vorlesungsunterlagen, die Übungen und ein Buch nach Wahl dürfen mitgebracht werden.
Mitzubringen sind Papier und Stifte.

Aufbau der Klausur: Die Klausur ist in zwei Teile geteilt:
Teil A umfaßt zehn Aufgaben zu je fünf Punkten. Die Aussagen, die dort getroffen werden, sollen Sie mittels **kurzer** Begründung beweisen oder widerlegen.
Teil B umfaßt drei Aufgaben zu je zehn Punkten. Hier erwarten wir von Ihnen eine ausführliche Bearbeitung.

Wertung: Die gesamte Klausur hat demnach einen Umfang von 80 Rohpunkten. Gewertet werden allerdings nur Aufgaben im Umfang von 60 Punkten. Dazu werden im Teil A die zwei Aufgaben und im Teil B die Aufgabe mit der niedrigsten Bewertung gestrichen.
Bestanden hat, wer 30 Punkte erreicht hat.

Probeklausur

Teil A: Beweisen oder widerlegen Sie!

Jede dieser Aufgabe ist 5 Punkte wert. Gewertet werden acht der zehn Aufgaben.
Verwenden Sie nur die in der Vorlesung und den Übungen bewiesenen Aussagen.
Entscheiden Sie, ob die Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung **kurz**!

Aufgabe A1: (*5 Punkte*) In einer einfachen Gruppe der Ordnung 396 gibt es genau 120 Elemente der Ordnung 11.

Aufgabe A2: (*5 Punkte*) Für eine Gruppe G mit neutralem Element e ist $\{x \in G \mid x^2 = e\}$ stets eine Untergruppe.

Aufgabe A3: (*5 Punkte*) In S_7 gibt es ein Element der Ordnung 10.

Aufgabe A4: (*5 Punkte*) Das Polynom $X^4 + X^3 + X + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$ ist irreduzibel.

Aufgabe A5: (*5 Punkte*) Sei $f \in \mathbb{Q}(X)$ ein irreduzibles Polynom. Dann ist $f(X+c)$ mit $c \in \mathbb{Q}$ auch irreduzibel.

Aufgabe A6: (*5 Punkte*) Jeder Körper mit 1024 Elementen enthält einen Körper mit 8 Elementen.

Aufgabe A7: (*5 Punkte*) $\sqrt{15}$ ist nicht rational.

Aufgabe A8: (*5 Punkte*) Sei $L|K$ eine Galoiserweiterung und Z ein Zwischenkörper. Die Anzahl der zu Z konjugierten Zwischenkörper von $L|K$ ist ein Teiler von $|L : K|$.

Aufgabe A9: (*5 Punkte*) Sei K ein Körper und $K(\alpha)|K$ eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G. Weiter sei $f(X) \in K[X]$ das Minimalpolynom von α. Dann ist

$$f(X) = \prod_{\sigma \in G} (X - \sigma(\alpha)) \ .$$

Aufgabe A10: (*5 Punkte*) Sei p eine Primzahl und $d|(p-1)$. Dann gibt es eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G, so daß $|G| = d$ ist.

Teil B: Begründen Sie sorgfältig!

Diese Aufgaben sind **ausführlich** zu bearbeiten. Auch hier dürfen Sie nur die in der Vorlesung oder den Übungen bewiesenen Aussagen verwenden.
Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erreicht werden. Gewertet werden zwei der drei Aufgaben.

Aufgabe B1: (*10 Punkte*) Jede Gruppe mit 24 Elementen ist auflösbar.

Aufgabe B2: (*10 Punkte*) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$, indem Sie ein Polynom $f(X)$ mit dieser Nullstelle bestimmen und $f(X)$ faktorisieren.

Aufgabe B3: (*10 Punkte*) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{-4})|\mathbb{Q}$ eine galoissche Erweiterung vom Grad 2 ist. Geben Sie eine einfachere Beschreibung dieses Körpers.