Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. Alice Keller

1. Übung zur Algebra 1, WS 04/05

Präsenzaufgabe

Für welche der Mengen M mit der Verknüpfung $\circ$ ist $(M, \circ)$ eine Gruppe?
Sei $n \in \mathbb{N}$ stets eine natürliche Zahl.

(i) $M = \mathbb{N}$ und $\circ = +$.
(ii) $M = \mathbb{R}$ und $\circ = +$.
(iii) $M = \mathbb{Q}$ und $\circ = \cdot$.
(iv) $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $\circ = +$.
(v) $M = \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n)$ und $\circ = \cdot$.
(vi) $M = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \mid a, c \in \mathbb{Q}^*,\ b \in \mathbb{Q}\}$ und $\circ = \cdot$.
(vii) $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $M = \{\text{Bijektionen von } N\}$ und $\circ$ die Hintereinanderausführung.
(viii) $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $M = \{\text{Bijektionen von } N\text{, die kein Element festlassen}\}$ und $\circ$ die Hintereinanderausführung.
(ix) $(M, \circ)$ ist das Erzeugnis

$$\langle a, b \mid a \circ a = b \circ b = e,\ a \circ b = b \circ a \rangle ,$$

wobei e ein neutrales Element ist.
Wieviele Elemente hat M?
(x) $(G, \circ)$ eine Gruppe mit 6 Elementen und $M = \{g \in G \mid g \circ g = e\}$ mit der Verknüpfung von G.

abzugebende Übungsaufgaben

Aufgabe 1: (*10 Punkte*) Sei S die Menge aller rationalen Zahlen mit quadratfreiem Nenner. Zeigen Sie, daß S eine additive Untergruppe von $\mathbb{Q}$ ist, die nicht zyklisch ist.

Aufgabe 2: (*10 Punkte*) Sei G eine (multiplikative) Gruppe mit 8 Elementen und neutralem Element e. Seien $a \neq b$ zwei von e verschiedene Elemente von G mit

$$a^k \neq e \text{ und } b^k \neq e \quad \text{für alle} \quad 1 \leq k < 4, \quad a^4 = b^4 = e, \quad \text{und} \quad a^3 b = ba.$$

Zeigen Sie, daß $\{a, b\}$ die Gruppe G erzeugt und stellen Sie die Gruppentafel auf.

Aufgabe 3: (*10 Punkte*)

(i) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge M mit einer Verknüpfung $\circ$, so daß $\circ$ nicht assoziativ ist, aber M ein neutrales Element besitzt und jedes $m \in M$ eine Inverses besitzt.

(ii) Geben Sie ein Beispiel für eine Menge M mit einer Verknüpfung $\circ$, die den vier Bedingungen

(a) $\circ$ ist assoziativ.

(b) M besitzt ein linksneutrales Element, d. h. es existiert ein $e \in M$ mit $e \circ a = a$ für alle $a \in M$.

(c) Jedes Element $m \in M$ besitzt ein Rechtsinverses m^{-1} mit $m \circ m^{-1} = e$.

(d) M ist keine Gruppe.

Aufgabe 4: (*10 Punkte*) Sei $G = \langle x \rangle$ die von x erzeugte Gruppe mit $|G| = n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $D_{2n} := \{(g, e) \mid g \in G,\ e \in \{\pm 1\}\}$ und

$$\cdot : D_{2n} \times D_{2n} :\longrightarrow D_{2n}, \quad ((g,e),(h,f)) \mapsto (gh^e, ef)\ .$$

(i) Zeigen Sie, daß D_{2n} eine Gruppe ist.

(ii) Zeigen Sie, daß für jedes $n \geq 3$ die Gruppe D_{2n} isomorph ist zur Gruppe der orthogonalen Abbildungen der Ebene auf sich, die ein regelmäßiges n-Eck um den Ursprung deckungsgleich in sich überführen.

(iii) Jede solche Drehung und Spiegelung permutiert die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks. Zeigen Sie, daß diese Permutationen eine zu D_{2n} isomorphe Untergruppe der Permutationsgruppe S_n bilden. Welche Permutation entspricht dabei welcher Bewegung?

Hinweis zu Teil (ii): Ordnen Sie $(x, 1) \in D_{2n}$ die Drehung (im mathematisch positiven Sinn) um $\frac{2\pi}{n}$ und $(1, -1)$ die Spiegelung an einer geeigneten Nullpunktsgeraden zu. Die Verknüpfung sollte dann der Hintereinanderausführung zweier Bewegungen entsprechen.

Bemerkung zur Aufgabe: D_{2n} heißt Diedergruppe. Diese Aufgabe enthält genaugenommen vier verschiedene Darstellungen der Diedergruppe. Teil *(i)* eine formal abstrakte, Teil *(ii)* sowohl eine geometrisch anschauliche als auch eine Interpretation dieser Gruppe als Untergruppe der orthogonalen (2×2)-Matrizen und Teil *(iii)* die Darstellung als Untergruppe der Permutationsgruppe.

Abgabe am 28.10.04 vor der Vorlesung