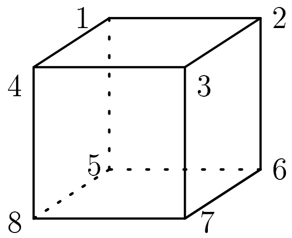
Universität des Saarlandes
FR 6.1, Mathematik
Prof. Dr. E.-U. Gekeler
Dipl.-Math. Alice Keller

2. Übung zur Algebra 1, WS 04/05

Aufgabe 1: (*5 Punkte*) Sei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in S_7$.
Bestimmen Sie die Zykeldarstellung von σ und geben Sie eine Zerlegung in benachbarte Transpositionen (d.h. in Elemente $(i, i+1)$) sowie eine weitere Zerlegung in Transpositionen an.
Welche Ordnung hat σ?

Aufgabe 2: (*25 Punkte*) Wir betrachten einen Würfel:



und die Bewegungen im Raum, die sich durch Zusammensetzung von Drehungen beschreiben lassen. Die Gruppe dieser Bewegungen (keine Spiegelungen!), die den Würfel in sich überführen, heißt Oktaedergruppe. Wir bezeichnen sie mit $\mathbb{O}$.
Ein Drehung, die den Würfel in sich überführt, läßt sich durch die Angabe der Rotationsachse und des Drehwinkels ebenso wie durch die Angabe der Permutation der acht Ecken eindeutig beschreiben.

(i) Beschreiben Sie alle Elemente aus $\mathbb{O}$ durch geometrische Angaben und geeignete graphische Darstellungen.

(ii) Skizzieren Sie die geometrische Bedeutung der verschiedenen Drehungen (Stichworte: Matrizendarstellung einer Rotation, Eigenwerte, Eigenräume).

(iii) Finden Sie eine geeignete Einbettung von $\mathbb{O}$ in S_8! D. h. geben Sie zu jedem Element $g \in \mathbb{O}$ eine $\sigma_g \in S_8$ in Zykelschreibweise an, so daß

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & S_8 \\ g & \mapsto & \sigma_g \end{array}$$

ein Monomorphismus ist.

(iv) Wieviele Elemente hat $\mathbb{O}$?

(v) Finden Sie eine Einbettung von $\mathbb{O}$ in die Gruppe S_4? (Skizze)

Aufgabe 3: (*10 Punkte*) Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

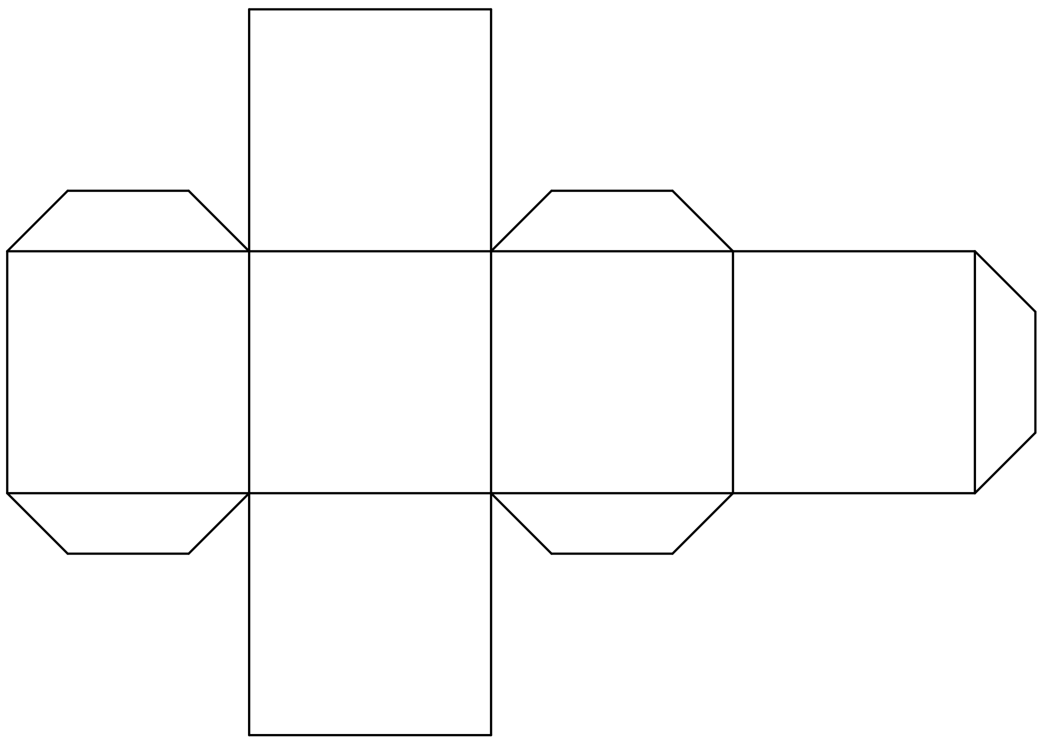
(i) G ist abelsch.

(ii) Für alle $a, b \in G$ ist $(ab)^2 = a^2b^2$.

(iii) Für alle $a, b \in G$ ist $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

Abgabe am 04.11.04 vor der Vorlesung

Falls Sie zur Berarbeitung von Aufgabe 2 ein Anschauungsmodell verwenden wollen, können Sie sich dies selbst basteln:
Schneiden Sie die Figur aus und falten Sie längs der Linien. An den abgeschrägten Streifen müssen Sie noch etwas Klebstoff anbringen.



Unter http://www.mathematische-basteleien.de/oriwuerfel.htm finden Sie eine Faltanleitung, bei der Sie keinen Klebstoff benötigen.